Т. И. Ведерникова
Г. П. Хамитов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ЗАДАЧНИК

Т. И. Ведерникова, Г. П. Хамитов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ЗАДАЧНИК

Второе издание, исправленное и дополненное

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Байкальский государственный университет

Т. И. Ведерникова, Г. П. Хамитов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ЗАДАЧНИК

Второе издание, исправленное и дополненное

Иркутск
Издательский дом БГУ
2020

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.171я7
В26

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Байкальского государственного университета

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. В. А. Пархомов
канд. физ.-мат. наук, доц. В. В. Ступин

Ведерникова Т. И.

В26 Теория вероятностей : задачник / Т. И. Ведерникова, Г. П. Хамитов†. – 2-е изд., испр. и доп. – Иркутск : Изд. дом БГУ, 2020. – 127 с. – URL: http://lib-catalog.bgu.ru.

Задачник состоит из тринадцати разделов. Каждый раздел содержит десять задач с решениями и задачи для самостоятельной проработки. В начале раздела приводится необходимый теоретический материал, который можно использовать для самостоятельного освоения курса теории вероятностей в режиме экстерна. По своей структуре, логике изложения, обозначениям задачник ориентирован на базовое учебное пособие «Вероятности и статистики», разработанное авторами.

Первое издание вышло в 2005 г. Второе издание исправлено и дополнено.

Адресован студентам бакалавриата и магистратуры, аспирантам и специалистам, использующим вероятностно-статистические модели в научных исследованиях и практической деятельности.

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.171я7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание задачника вышло в 2005 г. небольшим тиражом, разошлось довольно быстро и пользовалось популярностью у студентов. Спустя некоторое время были обнаружены опечатки и неточности. Студентам для уточнения правильности решения задач хотелось сравнивать полученные результаты с правильными ответами.

Новое откорректированное издание содержит больше ответов к задачам, предназначенным для самостоятельной работы, и дополнено таблицей определенных интегралов, которые часто используются в теории вероятностей. Эту работу, к сожалению, мне пришлось выполнять одной.

С благодарностью и в память о профессоре Г. П. Хамитове.

Т. И. Ведерникова

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Среди разделов математики теория вероятностей и математическая статистика занимают все большее место в арсенале современных направлений в экономике, социологии, биологии, медицине и других прикладных областях. Сложившееся положение объясняется следующим. Во-первых, это статистический характер ряда фундаментальных законов природы и общества, во-вторых – случайный характер событий, образующих сложные процессы. Поэтому единственно доступными математическими моделями, наиболее адекватно отражающими реальную действительность, являются вероятностные модели.

Теория вероятностей предлагает по вероятностям одних случайных событий находить вероятности других событий, связанных с первыми. Возможность применения вероятностно-статистических методов к изучению закономерностей в различных областях человеческой деятельности основана на том, что вероятности событий просты по своей природе. Изучение свойств событий на основе этих простых соотношений и составляет предмет теории вероятностей. Как математическая наука, она оперирует с абстрактными математическими понятиями и моделями, и вопрос о том, когда и как следует применять эти методы, всегда будет определяться связями между степенью точности, с которой изучается данное явление, и сведениями о его природе, которыми располагает исследователь.

Математика едина (как заметил Давид Гильберт). Каждая математическая теория становится более доступной и понятной, если ее удается применить для решения практических задач. Настоящий задачник позволяет приобрести первоначальные сведения об использовании теоретических знаний на разнообразных примерах. Мы стремились быть лаконичными и достаточными для того, чтобы через набор предлагаемых задач дать кругозор, навыки постановки и применения их в возможных приложениях.

Задачник состоит из тринадцати разделов, каждый из которых содержит необходимый теоретический материал, десять задач с решениями и задачи для самостоятельной проработки, последние из них, как правило, повышенной сложности. Первые четыре раздела посвящены случайным событиям, следующие четыре – случайным величинам, девятый – функциональным преобразованиям случайных величин. Разделы с десятого по двенадцатый отданы производящим и характеристическим функциям, последний – закону больших чисел и центральной предельной теореме. Данный задачник является неотъемлемой частью лекций, читаемых авторами.

Г. П. Хамитов, Т. И. Ведерникова

1. ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СОБЫТИЙ. ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ

Основные понятия раздела

Исходом (*элементарным событием*) ω называется неразложимый результат испытания E, характеризуемый значениями параметров, которые это испытание позволяют измерить.

Пространством Ω *исходов* ω испытания E называется множество $\{\omega\}$ всех исходов (элементарных событий), при этом пишут: $\Omega = \{\omega\}$ либо $\omega \in \Omega$.

Случайным событием называется свойство изучаемой системы, которое обнаруживается или не обнаруживается при каждой реализации испытания E. Каждое событие A характеризуется множеством $A \subseteq \Omega$ тех точек ω, для которых оно имеет место. Событие определяется этим подмножеством и отождествляется с ним (событие произошло, если произошло какое-либо из элементарных событий $\omega \in A$).

Над множествами (событиями) можно выполнять элементарные операции теории множеств:

а) *пересечение*: $A_1 = A \cap B = AB = \{\omega : \omega \in A \text{ и } \omega \in B\}$, событие A_1 – произведение событий A и B;

б) *объединение*: $A_2 = A \cup B = \{\omega : \omega \in A \text{ или } \omega \in B\}$, A_2 – сумма событий A и B.

Если пересечение компонент объединения представляет собой пустое множество, т. е. $AB = \varnothing$ (множество $\varnothing$ не содержит элементарных событий), то A_2 обозначают $A + B$, а события A и B называют *несовместимыми* (несовместными).

Событие Ω называют *достоверным*, событие $\varnothing$ – *невозможным*.

Разность событий A и B соответствует множеству $C = A \setminus B$, состоящему из элементарных исходов, принадлежащих A и не принадлежащих B. Событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$ называется *дополнительным* к A (*противоположным* событию A).

Задачи с решениями

1. Монета подбрасывается три раза подряд. Под исходом опыта будем понимать последовательность $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, где каждый из ω_i обозначает выпадение герба или решки. Требуется: а) построить пространство элементарных событий Ω; б) перечислить элементарные исходы, образующие случайное событие *А*, состоящее в том, что выпало не менее двух гербов.

<u>Решение</u>. Обозначим через *Р* выпадение решки и через *Г* – выпадение герба, тогда каждое ω_i будет либо *Р*, либо *Г*.

а) $\Omega = \{(\text{ГГГ}), (\text{ГГР}), (\text{ГРР}), (\text{РРР}), (\text{РРГ}), (\text{РГГ}), (\text{РГР}), (\text{ГРГ})\}$;

б) $A = \{(\text{ГГГ}), (\text{ГГР}), (\text{РГГ}), (\text{ГРГ})\}$.

2. Событие *В* является частным случаем события *А* (рис. 1.1). Чему равны их объединение и произведение?

<u>Решение</u>. $A\cup B=\{\omega:\omega\in A\,\text{или}\,\omega\in B,\,\text{или}\,\omega\in A\,\text{и}\,B\,\text{одновременно}\}$. Из $B\subseteq A$ следует, что из осуществления события B следует осуществление A, т. е. $\{\omega\in B\}\subseteq\{\omega\in A\}$. Отсюда можно записать, что $A\cup B=\{\omega:\omega\in A\}=A$. $A\cap B=\{\omega:\omega\in A\,\text{и}\,\omega\in B\}$. Исходя из того что $B\subseteq A$ (т. е. если $\omega\in B$, то $\omega\in A$), перепишем $A\cap B=\{\omega:\omega\in B\}=B$.

3. Даны два случайных события A и B.

а) Найти результаты операций: $A\cup A$ и $A\cap A$.

б) Когда события $A\cap B$ и A равносильны?

в) Являются ли совместными события A и $\overline{A\cup B}$?

<u>Решение</u>.

а) $A\cup A=\{\omega:\omega\in A\,\text{или}\,\omega\in A\}=\{\omega:\omega\in A\}=A$.

$A\cap A=\{\omega:\omega\in A\,\text{и}\,\omega\in A\}=\{\omega:\omega\in A\}=A$.

б) $A\cap B=A$, когда $A\subseteq B$ (см. задачу 2).

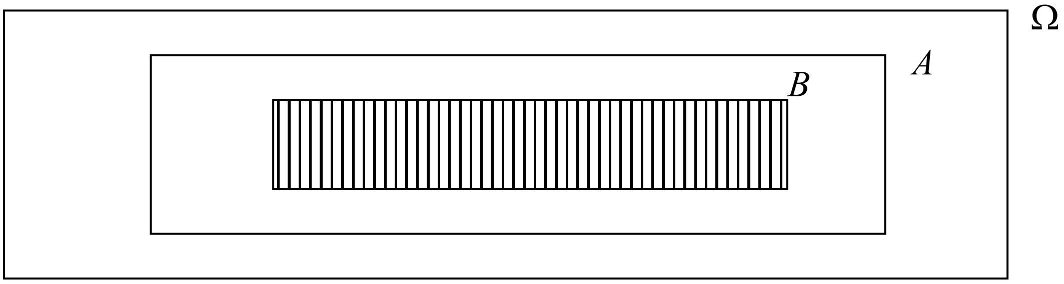


Рис. 1.1. Событие B является частным случаем события A. Заштриховано произведение событий A и B

в) $A\cap(\overline{A\cup B})=A\cap(\overline{A}\cap\overline{B})=A\cap\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing\cap\overline{B}=\varnothing$. Следовательно, события A и $\overline{A\cup B}$ несовместны.

4. Пусть A, B, C – случайные события. Когда выполняются равенства:

а) $A\cap B\cap C=A$; б) $A\cup B\cup C=A$?

<u>Решение</u>.

а) $A\cap B\cap C=A$. Обозначим через $D=B\cap C$ и перепишем данное соотношение $A\cap D=A$. Отсюда видно (см. пример 2), что равенство имеет смысл, когда $A\subseteq B\cap C$;

б) $A\cup B\cup C=A$, когда $B\cup C\subseteq A$ $(B\subseteq A\,\text{и}\,C\subseteq A)$.

5. Доказать, что события A, $\overline{A}\cap B$ и $\overline{A\cup B}$ образуют полную группу несовместных событий.

<u>Решение</u>. Случайные события образуют полную группу несовместных событий, если они попарно не пересекаются и в сумме образуют пространство исходов Ω.

Имеем: $A=\{\omega:\omega\in A\}$, $\overline{A}\cap B=\{\omega:\omega\notin A\,\text{и}\,\omega\in B\}$, $\overline{A\cup B}=\{\omega:\omega\notin A\,\text{и}\,\omega\notin B\}$. Отсюда получаем $A+\overline{A}\cap B+\overline{A\cup B}=\Omega$. С другой стороны,

$A\cap(\overline{A}\cap B)=A\cap\overline{A}\cap B=\varnothing$, так как $A\cap\overline{A}=\{\omega:\omega\in A\,\text{и}\,\omega\in\overline{A}\}=\varnothing$,

$$A\cap(\overline{A\cup B})=A\cap(\Omega\setminus(A\cup B))=(A\cap\Omega)\setminus(A\cap(A\cup B))=A\setminus A=\varnothing,$$
$$(\overline{A}\cap B)\cap(\overline{A\cup B})=((\overline{A}\cap B)\cap(\Omega\setminus(A\cup B))=((\overline{A}\cap B)\cap\Omega)\setminus((\overline{A}\cap B)\cap(A\cup B))=$$
$$=(\overline{A}\cap B)\setminus((\overline{A}\cap B\cap A)\cup(\overline{A}\cap B\cap B))=(\overline{A}\cap B)\setminus(\varnothing\cup\overline{A}\cap B)=(\overline{A}\cap B)\setminus(\overline{A}\cap B)=\varnothing.$$

Следовательно, события A, $\overline{A}\cap B$ и $\overline{A\cup B}$ образуют полную группу несовместных событий.

6. Событие A – хотя бы одно из имеющихся изделий бракованное; событие B – бракованных изделий среди имеющихся четырех не менее двух. Что означают противоположные события – $\overline{A}$ и $\overline{B}$?

Решение. Событие $\overline{A}$ является противоположным к событию A, следовательно, в сумме они образуют все пространство исходов, тогда $\overline{A}$ означает, что среди имеющихся четырех изделий бракованных нет.

Рассуждая аналогично, утверждаем, что $\overline{B}$ означает – среди имеющихся четырех изделий бракованных меньше двух.

7. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Пусть $A_i\,(i=1,2,3)$ – событие, состоящее в том, что i-я деталь окажется стандартной. Выразить через A_i событие, состоящее в том, что из трех проверенных изделий только одно нестандартное.

Решение. Обозначим через B событие, состоящее в том, что из трех проверенных изделий только одно нестандартное. Возможно наступление трех несовместных событий: $\overline{A_1}A_2A_3$ – первое изделие нестандартно, а два другие стандартны; $A_1\overline{A_2}A_3$ – нестандартно только второе изделие; $A_1A_2\overline{A_3}$ – первые два изделия стандартны, третье нестандартно. Отсюда получаем, что $B=\overline{A_1}A_2A_3+A_1\overline{A_2}A_3+A_1A_2\overline{A_3}$.

8. В ящике содержатся шары двух цветов – синие и красные. Пусть C – событие, состоящее в том, что при единичном испытании вынут синий шар, а K – что при единичном испытании вынутый шар окажется красным. Запишите событие, означающее, что вынуты два шара одного цвета.

Решение. Обозначим искомое событие через A. Оно будет заключаться в том, что вынуты или два синих шара, т. е. произошло событие C_1C_2, или два красных шара – событие K_1K_2. Эти два события являются несовместными, тогда получаем $A=C_1C_2+K_1K_2$ (индексы означают номер испытания).

9. Среди студентов, собравшихся на лекцию, выбирают наудачу одного. Пусть событие A заключается в том, что выбранный студент окажется юношей. Событие B – в том, что студент не курит. Событие C состоит в том, что студент живет в общежитии.

а) В чем заключается смысл события $A\cap\overline{B\cap C}$?

б) При каком условии будет иметь место тождество $A\cap B\cap C=A$?

в) Когда будет справедливо соотношение $\overline{C}\subseteq B$?

г) Когда будет справедливо равенство $\overline{A}=B$?

Решение.

а) Событие A – выбранный студент является юношей. Событие $B \cap C = D$ – студент не курит и живет в общежитии. Событие $\overline{B \cap C}$ противоположно к событию D, а это значит, что студент курит или не живет в общежитии (в терминах совместных событий), либо: курит и не живет в общежитии, или живет в общежитии и курит, или не курит и не живет в общежитии (в терминах несовместных событий). Тогда $A \cap \overline{B \cap C}$ состоит в том, что выбран юноша, который не живет в общежитии или курит (в терминах совместных событий), либо: юноша курит и не живет в общежитии, или юноша живет в общежитии и курит, или юноша не курит и не живет в общежитии (в терминах несовместных событий). Формально: $\overline{B \cap C} = \overline{B} \cup \overline{C} = C \cap \overline{B} + \overline{B} \cap \overline{C} + \overline{C} \cap B$.

б) Воспользуемся обозначением $B \cap C = D$ и перепишем исходное равенство $A \cap D = A$. Тогда (см. пример 1) $A \subseteq D$, т. е. тождество $A \cap B \cap C = A$ будет иметь место, когда все юноши не курят и живут в общежитии.

в) Событие $\overline{C}$ означает, что студент не живет в общежитии, B – что не курит. Соотношение $\overline{C} \subseteq B$ будет справедливо тогда, когда не живущие в общежитии не курят.

г) Событие $\overline{A}$ означает, что выбрана девушка. Событие B – студент не курит. Тогда $\overline{A} = B$ справедливо, когда все девушки не курят, а все юноши курят.

10. Рабочий изготовил *n* деталей. Пусть событие $A_i \, (i = \overline{1, n})$ заключается в том, что *i*-я изготовленная им деталь имеет дефект. Записать событие, состоящее в том, что: а) ни одна из деталей не имеет дефекта (событие B); б) хотя бы одна деталь имеет дефект; в) только одна деталь имеет дефект (событие C).

Решение.

а) Если A_i есть событие, что *i*-я изготовленная деталь имеет дефект, то $\overline{A_i}$ – событие противоположное, т. е. *i*-я деталь не имеет дефекта. Искомое событие состоит в том, что ни одна из *n* изготовленных деталей не имеет дефектов, т. е. и *1*-я деталь не имеет дефекта, и *2*-я деталь не имеет дефекта, и так далее, и *n*-я деталь без дефекта, т. е. имеет место произведение событий $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n} = B$.

б) Хотя бы одна деталь имеет дефект означает, что дефектными могут быть одна, две, ..., все детали, т. е. это событие является противоположным к событию *B* (п. а) данной задачи). Искомое событие есть

$$\overline{B} = \overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n .$$

в) Когда говорят, что только одна деталь имеет дефект, то это означает, что дефектна или *1*-я деталь, или *2*-я деталь, или и так далее *n*-я деталь (при этом остальные (*n* – 1) деталей не имеют дефектов). Тогда искомое событие запишется следующим образом:

$$A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \ldots \cap \overline{A_n} + \overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \ldots \cap \overline{A_n} + \ldots + \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \ldots \cap A_n = C .$$

Задачи для самостоятельной работы

1.1. Бросается игральная кость. Событие A – выпадет четное число очков, событие B – выпадет число очков, меньшее трех. Что означают следующие события: $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$?

1.2. Бросаются две игральные кости. Событие A – на каждой грани выпадает четное число очков, событие B – на каждой грани выпадает нечетное число очков, событие C – хотя бы на одной из костей выпала *1*, событие D – сумма очков на верхних гранях четная, E – на каждой грани выпадут очки одной четности.

а) Что означают события: $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $\overline{A}\cup B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cup B}$ и $\overline{A\cap B}$?

б) Доказать, что $D=E$.

в) Описать события: $A\cup C$, $A\cup D$, $A\cup E$, $\overline{D}\cup E$, $\overline{D}\cap E$, $D\setminus E$.

1.3. Пусть A, B и C – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из A, B и C: а) произошли все три события; б) произошло только одно из этих событий; в) произошло по крайней мере два из этих событий.

1.4. Объединение $A\cup B$ двух событий может быть выражено как объединение двух несовместных событий $A\cup B=A+(B\setminus(A\cap B))$. Выразить аналогичным образом объединение трех событий A, B и C.

1.5. Доказать равенство $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$. Изобразить фигурами на плоскости множества, стоящие в левой и правой частях доказываемого равенства.

1.6. Доказать равенство $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$. Изобразить фигурами на плоскости множества, стоящие в левой и правой частях доказываемого равенства.

1.7. Пусть заданы два произвольных случайных события A и B. Найти все события C такие, что $A\cap C=A\cap B$.

1.8. Доказать равенство $A\cap(B_1+\ldots+B_n)=A\cap B_1+\ldots+A\cap B_n$.

1.9. Двое играют в шахматы. Событие A означает, что выиграл первый игрок, событие B – выиграл второй игрок. Что означают события: $A\cup\overline{B}$, $\overline{A}\cup B$, $\overline{A}\cup\overline{B}$, $A\setminus\overline{B}$, $\overline{A}\setminus B$ и $\overline{A}\cap\overline{B}$?

1.10. Из урны, содержащей черные и белые шары, извлечены n шаров. Пусть A_i – событие, состоящее в том, что i-й шар белый ($i=\overline{1,n}$). Выразить через A_i следующие события: а) все извлеченные шары окажутся одного цвета; б) среди вынутых шаров есть хотя бы один белый; в) среди n извлеченных шаров только один шар белый; г) среди извлеченных шаров не более k шаров белого цвета ($1\le k\le n$); д) среди вынутых шаров, по крайней мере, k шаров белые; е) среди n шаров ровно k белых.

1.11. Одновременно бросаются три монеты. Событие A – выпадет хотя бы одна решка, событие B – выпадет хотя бы один герб. Что означают события $A\cup B$, $A\cap B$ и $A\setminus B$?

1.12. Из множества супружеских пар наугад выбирается одна пара. Событие A состоит в том, что мужу больше *30* лет, событие B – муж старше жены, событие C – жене больше *30* лет. Что означают события: $A \cap B \cap C$, $A \setminus (A \cap B)$, $A \cap \overline{B} \cap C$, $A \setminus A \cap \overline{B}$, $A \setminus A \cup B$ и $A \cap B \cap \overline{C}$?

1.13. Событие A_i заключается в том, что при i-м измерении некоторой физической величины допущена ошибка. Произведены три независимых измерения. Записать через A_i событие, состоящее в том, что только в одном из них допущена ошибка.

1.14. В отдел технического контроля поступило N приборов. Событие A_i состоит в том, что i-й прибор является неисправным. Записать через A_i событие, означающее, что среди N поступивших приборов неисправных нет.

1.15. Пусть A, B и C – произвольные события, причем $A \subset B$. Упростить выражения: а) $A \cap B$; б) $A \cup B$; в) $A \cap B \cap C$; г) $A \cup B \cup C$.

1.16. Каково условие совместности событий: $A \cup B$, $\overline{A} \cup B$ и $A \cup \overline{B}$?

1.17. Мишень состоит из десяти кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами $r_1 < r_2 < \ldots < r_{10}$. Событие A_k – попадание в круг радиуса r_k, $k = \overline{1,10}$. Что означают события:

а) $B = \bigcup\limits_{k=1}^{6} A_k$;

б) $C = \bigcap\limits_{k=5}^{10} A_k$;

в) $D = \overline{A}_1 A_2$?

1.18. Пусть A и B – произвольные события. Доказать следующие равенства: а) $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = A + B$; б) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$.

1.19. Пусть на плоскость, на которой изображены два непересекающихся круга, бросается точка. Событие A – точка попадает в первый круг, событие B – точка попадает во второй круг. Что означают события: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A + B$, $\overline{A + B}$, $\Omega \setminus A$, $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$?

1.20. Проводятся три независимых испытания, в каждом из которых некоторое событие может появиться (A) или не появиться ($\overline{A}$). Выразить через A и $\overline{A}$ следующие события: а) событие произошло в первом испытании; б) событие произошло два раза; в) событие произошло не более двух раз.

1.21. Два лица – ***A*** и ***B*** – условились встретиться в определенном месте между *12* и *13* часами. Пришедший первым ждет другого в течение *20* минут, после чего уходит. Изобразить фигурами на плоскости пространство Ω всех исходов и подпространство ***C*** исходов, благоприятствующих встрече, если приход ***A*** и ***B*** в течение указанного часа происходит наудачу.

1.22. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии *2a*. На плоскость наудачу бросается игла длины

$2b(b<a)$. Событие A заключается в том, что игла пересечет какую-нибудь прямую. Изобразить на плоскости событие A и пространство Ω.

1.23. Доказать, что $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

1.24. Задано двухзначное число. Событие A – число делится на 2, событие B – число делится на 5. Объяснить смысл событий: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup \overline{B}$, $A \cap \overline{B}$.

1.25. Доказать, что событие $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$ невозможно.

1.26. Три шара – a, b и c – размещаются по трем ящикам. Перечислить все возможные исходы испытания.

1.27. Четыре одинаковых шара размещаются по четырем ящикам. Перечислить все возможные исходы испытания. Выделить событие, когда два ящика остаются свободными.

1.28. Три игрока – a, b и c – участвуют в игре по следующей схеме. В первом туре играют a и b, игрок c свободен. Проигравший заменяется игроком c, во втором туре играют победитель и игрок c. Игрок, потерпевший поражение в первом туре, свободен. В третьем туре играют победитель второго тура и игрок, проигравший в первом туре. Соревнование продолжается таким образом до тех пор, пока один из игроков не выиграет двух партий подряд. В этом случае его объявляют победителем. Перечислить все возможные исходы испытания (возможность ничьей в отдельной партии исключается).

1.29. Пусть Ω состоит из 2^n точек $\omega = \{\omega_1, ..., \omega_i, ..., \omega_n\}$, где координаты ω_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$ принимают значения 0 или 1. Пусть $P(\omega) = 2^{-n}$, $A_k = \{\omega : \omega_1 + ... + \omega_n = k\}$; $k = \overline{0, n}$ и $N(A_k)$ – число точек ω, входящих в A_k. Показать, что $N(A_k) = C_n^k$.

1.30. Пусть имеется урна с M *различными* шарами, отличающимися один от другого тем, что они пронумерованы числами $1, 2, ..., M$. Предположим, что K из этих шаров – красные и $(M-K)$ – черные. После каждого извлечения из урны шар возвращается обратно. Тогда результат m извлечений можно записать в виде $\omega = \{\omega_1, ..., \omega_m\}$, где каждое из ω_i принимает одно из M значений. Следовательно, множество $\Omega = \{\omega\}$ будет состоять из $N(\Omega) = M^m$ элементарных исходов. Пусть A_k – событие, состоящее в том, что среди вынутых шаров ровно k – красного цвета и $(m-k)$ – черного. Показать, что $N(A_k) = C_m^k \cdot K^k (M-K)^{m-k}$.

1.31. Предположим, что есть m различных шаров, из которых m_1 – первого цвета, ... , m_s – s-го цвета ($m_1 + ... + m_s = m$). Будем рассматривать выбор с возвращением и обозначать результат n извлечений $\omega = \{\omega\}_{i=1}^n$. Тогда $N(\Omega) = N\{\omega\} = m^n$. Обозначим A_r множество тех ω, у которых r_1 координат первого цвета и т. д., r_s координат s-го цвета ($r_1 + ... + r_s = n$). Показать, что $N(A_r) = \dfrac{n!}{r_1! ... r_s!} m_1^{r_1} ... m_s^{r_s}$.

1.32. В условиях задачи 1.30 предположим, что после каждого извлечения вынутый шар в урну не возвращается. Тогда результат m таких извлечений можно представить в виде $\omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$; $\omega_1 \neq ... \neq \omega_m$. Пусть $\Omega = \{\omega: \omega = (\omega_1, ..., \omega_m);\ \omega_1 \neq ... \neq \omega_m\}$. Тогда $N(\Omega) = M^{[m]}$, где

$$M^{[m]} = M(M-1)...(M-m+1) = \frac{M!}{(M-m)!}.$$

По-прежнему событие A_k состоит в том, что среди вынутых шаров ровно k – красного цвета и $(m-k)$ – черного. Показать, что $N(A_k) = C_m^k K^{[k]}(M-K)^{[m-k]}$.

2. ВЕРОЯТНОСТИ В ДИСКРЕТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ИСХОДОВ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Основные понятия раздела

Пространство элементарных событий называется *дискретным*, если оно состоит из конечного или счетного числа точек.

Вероятность события есть численная мера степени объективной возможности этого события.

Пусть дано дискретное пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_i\}$ и пусть с каждой точкой ω_i связано число, называемое *вероятностью элементарного события* ω_i и обозначаемое $P(\omega_i)$, причем $\sum_i P(\omega_i) = 1$, $P(\omega_i) \geq 0$. При этом говорят, что неотрицательная числовая функция $P \equiv P(\omega_i)$ задает на Ω *распределение вероятностей*.

Вероятность $P(A)$ события A есть сумма вероятностей тех элементарных исходов, которые образуют множество A, т. е. $P(A) = \sum_{\{i:\ \omega_i \in A\}} P(\omega_i)$.

Говорят, что для испытания E с дискретным пространством Ω построена *вероятностная модель* (Ω, P), если указаны все точки пространства элементарных событий $\Omega = \{\omega_i\}$ и соответствующие вероятности $P = \{P(\omega_i)\}$ исходов ω_i.

Часто выделяют и рассматривают отдельно вероятностную модель (Ω, P) с конечным пространством элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$, когда $P(\omega_1) = ... = P(\omega_n)$ для всех исходов $\omega_1, ..., \omega_n$ испытания E. При этом исходы называют *случаями (шансами)* и говорят, что испытание E сведено к *схеме случаев (схеме шансов)*, а вероятностную модель называют *классической*.

В рамках классической вероятностной модели вероятность случайного события A (классическое определение) вычисляется по формуле $P(A) = \frac{k}{n}$, где n – число всех случаев, k – число случаев, благоприятствующих событию A.

Встречаются задачи, когда существует несчетное множество исходов. При этом по-прежнему основой послужит понятие «равновероятности» и «несовместности» некоторой «полной группы» элементарных событий. Пусть, например, на плоскости имеется область G, которая содержит другую область g, имеющую своей границей замкнутую кривую. В область G наудачу бросается точка и спрашивается, чему равна вероятность того, что точка попадает в область g. При этом выражению «точка бросается наудачу в область G» придаётся следующий смысл: брошенная точка может попасть в любую точку области G, вероятность попасть в какую-либо часть области пропорциональна мере этой части (длине, площади и т. д.) и не зависит от ее расположения и формы. Здесь имеет место *геометрическая вероятность* – вероятность попадания в область g, которая определяется как отношение мер: $P=\dfrac{m(g)}{m(G)}$.

Задачи с решениями

1. В урне имеются *10* шаров: *3* белых и *7* черных. Из урны наугад вынимается *1* шар. Какова вероятность того, что этот шар: а) белый; б) черный.

Решение. В силу того что число возможных способов достать шар из урны конечно и вероятность извлечения каждого шара одна и та же, применима классическая вероятностная модель.

а) Обозначим через A событие, состоящее в том, что будет извлечен белый шар. Следовательно, $P(A)=\dfrac{k}{n}=0{,}3$, т. к. $k=3$ – число исходов, благоприятствующих событию A, а $n=10$ – число всех исходов пространства Ω.

б) Обозначив через B событие, состоящее в том, что из урны будет вынут черный шар, получим $P(B)=7:10=0{,}7$.

2. Из слова «НАУГАД» выбирается наугад одна буква.

а) Какова вероятность того, что эта буква «Я»?

б) Какова вероятность того, что это гласная?

Решение.

а) Обозначим через A событие, состоящее в том, будет выбрана буква «Я». Число возможных способов выбрать одну букву из заданного слова $n=6$ (количество букв в слове). Применим классическое определение вероятности. Число благоприятных исходов $k_A=0$. Тогда вероятность искомого события $P(A)=0:6=0$.

б) Обозначим через B событие, заключающееся в выборе гласной буквы. Число гласных букв в слове есть число исходов, благоприятных событию B $(k_B=3)$. Отсюда получаем $P(B)=3:6=0{,}5$.

3. Брошены три монеты. Найти вероятность того, что выпадут два герба.

Решение. Элементарный исход испытания представляет собой последовательность $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, где каждый из ω_i обозначает выпадение герба (*Г*) или решки (*Р*). Обозначим через A событие, состоящее в том, что выпадут два герба, и перечислим все исходы этого события:

$A=\{(\text{ГГР}),(\text{ГРГ}),(\text{РГГ})\}$.

Пространство исходов устроено следующим образом:

$\Omega=\{(\text{ГГГ}),(\text{ГГР}),(\text{ГРР}),(\text{РРР}),(\text{РРГ}),(\text{РГГ}),(\text{РГР}),(\text{ГРГ})\}$.

Применив классическое определение вероятности, получаем:

$P(A)=3:8=0{,}375$.

4. В урне *4* красных и *6* черных шаров. Наугад вынимается *3* шара. Какова вероятность, что два шара будут черного цвета?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, среди вынутых трех шаров два будут черного цвета. Так как число исходов конечно и все исходы равновероятны, можно применить классическую вероятностную модель, согласно которой вероятность искомого события есть $P(A)=\frac{k}{n}$.

Элементарный исход испытания представляет собой выбор трех любых шаров. Число n всех исходов испытания представляет собой множество способов вынуть *3* шара из *10*. Это есть число сочетаний из *10* по *3*, т. е. $n=C_{10}^3$. Число благоприятных исходов составляют лишь те, когда среди трех шаров есть два черных и один красный. Другими словами, можно сказать, что здесь как бы составляются пары из одного красного и двух черных шаров. Количество способов взять *1* красный шар из *4* есть $k_1=C_4^1$, а *2* черных шара из *6* есть $k_2=C_6^2$, отсюда получаем число возможных пар $k=k_1\times k_2=C_4^1C_6^2$. Тогда окончательно

$$P(A)=\frac{C_4^1\times C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{4!}{1!(4-1)!}\times\frac{6!}{2!(6-2)!}:\frac{10!}{3!(10-3)!}=0,5\,.$$

5. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня только, что эти цифры нечетные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

Решение. Обозначим через A искомое событие и применим для вычисления $P(A)$ классическую вероятностную модель. Под исходом испытания будем понимать набор двух любых разных нечетных цифр от *0* до *9*. Причем исходы, когда две цифры переставлены местами будем считать различными. Такое комбинаторное многообразие отвечает размещению из *5* элементов по *2*, т. е. $n=A_5^2$. Благоприятных исходов *1*. Тогда получаем, что

$$P(A)=\frac{1}{A_5^2}=1:\frac{5!}{(5-2)!}=\frac{1}{20}\approx 0,05\,.$$

6. $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ и еще *8* человек стоят в очереди. Определить вероятность того, что $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ отделены друг от друга тремя персонами.

Решение. Пусть D – событие, состоящее в том, что $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ отделены друг от друга тремя лицами. Для определения вероятности $P(D)$ можно применить классическое определение, т. к. пространство исходов конечно и все исходы равновероятны. Исход испытания в данной задаче представляет собой любую последовательность людей в очереди из *10* человек. Число способов переставить этих людей есть $n=P_{10}$. Количество благоприятных исходов будет образовываться «парами» (a_i,b_j), $i=\overline{1,k_1}$; $j=\overline{1,k_2}$, $\{a_i\}$ – способы расположения $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ так, чтобы их отделяло 3 человека $(k_1=6\times 2)$, $\{b_j\}$ – это всевозможные перестановки оставшихся *8* человек очереди $(k_2=P_8)$. Окончательно получаем

$$P(D)=\frac{k_1\times k_2}{n}=\frac{6\times 2\times P_8}{P_{10}}=\frac{12\times 8!}{10!}=\frac{2}{15}\approx 0,1(3)\,.$$

7. В партии из *50* изделий *5* бракованных. Из партии наугад выбираются *6* изделий. Определить вероятность того, что среди этих *6* изделий *2* окажутся бракованными.

<u>Решение</u>. Обозначим через *A* событие, состоящее в том, что среди *6* выбранных наугад изделий *2* окажутся бракованными и для нахождения вероятности $P(A)$ применим классическую вероятностную модель. Элементарный исход испытания в данной задаче заключается в выборе произвольным образом *6* изделий из *50*, и количество всех исходов определяется как число сочетаний из *50* по *6*, т. е. $n = C_{50}^{6}$. Число исходов, благоприятных событию *A*, составляют лишь те из *n*, когда присутствуют *2* бракованных. Таким образом, в каждой шестерке присутствуют *2* бракованных изделия и *4* небракованных, т. е. как бы составляются пары из бракованных и небракованных изделий, причем одна шестерка отличается от другой, если они различаются хотя бы одним элементом. Число способов выбрать *2* бракованных изделия есть $k_{б} = C_5^2$, а число способов выбрать *4* небракованных – это $k_{н} = C_{50-5}^{6-2}$. Тогда

$$P(A) = \frac{k_{б} \times k_{н}}{n} = \frac{C_5^2 \times C_{45}^4}{C_{50}^6} = \frac{5!}{2!(5-2)!} \times \frac{45!}{4!(45-4)!} : \frac{50!}{6!(50-6)!} \approx 0{,}09 .$$

8. Найти вероятность того, что дни рождения *12* человек придутся на разные месяцы года.

<u>Решение</u>. Пусть *A* – событие, состоящее в том, что дни рождения всех *12* человек придутся на разные месяцы года. Исход испытания представляет собой один из способов распределения по месяцам дней рождения *12* человек, причем все *12* могут родиться и в один месяц, т. е. образование исходов аналогично выбору с возвращением r элементов из совокупности, равной $r\,(r = 12)$. Тогда число всех элементарных событий $n = r^r$, а число исходов, благоприятных искомому событию, – $k = P_r$ (в каждый месяц только один день рождения, но для разных людей они могут быть переставлены внутри года). Окончательно получаем

$$P(A) = \frac{P_r}{r^r} = \frac{12!}{12^{12}} \approx 0{,}00005 .$$

9. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли *3* человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность следующих событий:

а) $A = \{\text{все пассажиры выйдут на четвертом этаже}\}$;

б) $B = \{\text{все пассажиры выйдут на одном этаже одновременно}\}$;

в) $C = \{\text{все пассажиры выйдут на разных этажах}\}$.

<u>Решение</u>. Элементарное событие в данной задаче заключается в том, что хотя бы на одном этаже, начиная со второго, выйдет хотя бы один человек, что представляет собой выбор каждым из трех человек одного из шести этажей (троекратный выбор наугад с возвращением одного из шести элементов), т. е. $n = 6^3$.

а) Событию *A* благоприятствует только один исход, тогда

$$P(A)=\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}\approx 0{,}005 .$$

б) Событие B представляет собой сумму из 6 событий, аналогичных событию A (A_2 – все выйдут на втором этаже, A_3 – все выйдут на третьем этаже и т. д., A_7 – все выйдут на седьмом этаже).

$$P(B)=P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)+P(A_5)+P(A_6)+P(A_7),$$

где все $P(A_i)=P(A)$, $i=\overline{1,6}$ по условию. Отсюда $P(B)=\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}\approx 0{,}027$.

в) Число исходов, благоприятствующих событию C, представляет собой число сочетаний из 6 элементов по 3, т. е. $k=C_6^3$. Тогда

$$P(C)=\frac{C_6^3}{6^3}=\frac{6!}{3!\times 3!}:6^3=\frac{5}{54}\approx 0{,}093 .$$

10. На отрезок наудачу брошены две точки. Найти вероятность того, что расстояние между ними окажется меньше половины.

<u>Решение</u>. Обозначим через L длину заданного отрезка, через l – расстояние между точками, а через A – событие, состоящее в том, что $l<L/2$. Так как число точек на отрезке (и на любой его части) бесконечно, применим для нахождения $P(A)$ геометрическое определение вероятности $P(A)=\frac{m(g)}{m(G)}$, где $m(G)$ есть мера пространства исходов, а $m(g)$ – мера исходов, благоприятных событию A.

Пусть x – координата первой точки, а y – координата второй точки, тогда событию A будут удовлетворять исходы, отвечающие условию $|x-y|\le l$ или $-l\le x-y\le l$, что соответствует заштрихованной области на рис. 2.1. Тогда $m(G)=L^2$, а $m(g)=L^2-l^2$ и $P(A)=\frac{L^2-l^2}{L^2}<\frac{L^2-(L/2)^2}{L^2}=\frac{3}{4}$.

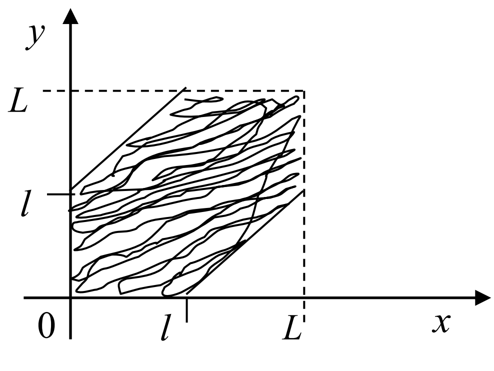


Рис. 2.1. Событию A соответствует заштрихованная область

Задачи для самостоятельной работы

2.1. Бросают игральную кость. Какова вероятность: а) выпадения номера большего шести; б) выпадения четной цифры; в) выпадения цифры, не превосходящей пять?

2.2. Брошены две игральные кости. Какова вероятность: а) выпадения на двух костях в сумме не менее *9* очков; б) выпадения *1*, по крайней мере, на одной кости; в) того, что сумма выпавших на них очков равна *8*, а разность *4*; г) того, что выпало *2* тройки, если известно, что сумма выпавших очков делится на *3*; д) того, что сумма очков на выпавших гранях – четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится *6*?

2.3. Из шести карточек с буквами ***А***, ***Б***, ***В***, ***Г***, ***Д***, ***Е*** наугад одна за другой выбираются три и располагаются в ряд в порядке появления. Какова вероятность того, что: а) получится слово «**ДВА**»; б) это будут гласные?

2.4. Среди *25* экзаменационных билетов *5* «хороших». Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятности следующих событий: а) первый студент взял «хороший» билет; б) второй студент взял «хороший» билет; в) оба студента возьмут «хорошие» билеты.

2.5. В шкафу находятся *10* пар различных ботинок. Из них случайно выбирается *4* ботинка. Найти вероятность того, что среди выбранных ботинок отсутствуют парные.

2.6. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик: а) имеет одну окрашенную грань; б) имеет две окрашенные грани; в) имеет три окрашенные грани; г) не имеет окрашенных граней.

2.7. В читальном зале имеется *6* учебников по теории вероятностей, из которых *3* в жестком переплете. Библиотекарь наудачу взял *2* учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в жестком переплете.

2.8. В партии из N деталей имеется n стандартных. Наудачу отобраны m деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно k стандартных $(k \le n)$.

2.9. В конверте среди *100* фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены *10*. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

2.10. В ящике *100* деталей, из них *10* бракованных. Наудачу извлечены *4* детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей нет бракованных.

2.11. В коробке *6* одинаковых изделий, причем *4* из них окрашены. Наудачу извлечены *2* изделия. Найти вероятность того, что среди извлеченных изделий окажется одно окрашенное.

2.12. В урне находятся *5* шаров различных цветов. Производится выборка с возвращением объема *25*. Найти вероятность того, что в выборке будет по *5* шаров каждого цвета.

2.13. В партии из *10* деталей *8* стандартных. Найти вероятность того, что: а) среди наудачу извлеченных двух деталей есть хотя бы одна стандартная; б) две, взятые одна за другой, детали окажутся нестандартными; в) среди извлеченных трех деталей нет нестандартных.

2.14. Среди *17* студентов группы, из которых *8* девушек, разыгрывается *7* билетов, причем каждый может выиграть только один билет. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся *4* девушки.

2.15. Из колоды в *52* карты одновременно наудачу извлекают *3* карты. Найти вероятность того, что: а) все извлеченные карты будут разных мастей; б) это будут тройка, семерка, туз; в) среди них окажется хотя бы один туз.

2.16. Тридцать шаров размещаются по *8* ящикам так, что для каждого шара одинаково возможно попадание в любой ящик. Найти вероятность размещения, при котором будет *3* пустых ящика, *2* ящика – с тремя, *2* ящика – с шестью и *1* ящик с двенадцатью шарами.

2.17. Из полного набора *28* костей домино наудачу берутся *5* костей. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы одна кость с шестеркой.

2.18. В урне лежат *5* карточек, занумерованных числами *1*, *2*, *3*, *4* и *5*. По схеме случайного выбора с возвращением из урны трижды вынимается карточка. Какова вероятность того, что ровно в двух случаях из трех будут вынуты карточки с нечетными номерами?

2.19. В урне лежат *5* карточек, занумерованных числами *1*, *2*, *3*, *4* и *5*. По схеме случайного выбора без возвращения вынимается *3* карточки. Какова вероятность того, что ровно в двух случаях из трех будут вынуты карточки с нечетными номерами.

2.20. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от *1* до *100*. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры *5*.

2.21. В коробке *30* одинаковых изделий, причем *10* из них окрашены. Наудачу извлечены *4* изделия. Найти вероятность того, что среди извлеченных изделий будет: а) хотя бы одно окрашенное; б) три окрашенных.

2.22. У сборщика имеется *10* деталей четырех видов. Из них *4* первого и по *2* второго, третьего и четвертого видов. Какова вероятность того, что среди *6* взятых одновременно деталей *3* окажутся первого вида, *2* – второго и *1* – третьего вида.

2.23. Найти вероятность того, что четырехзначный номер случайно взятого автомобиля в большом городе имеет все цифры разные.

2.24. Устройство состоит из *5* элементов, из которых *2* изношены. При включении устройства случайным образом включаются *2* элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

2.25 (задача Банаха). Некий математик носит с собой две коробки спичек. Каждый раз, когда он хочет достать спичку, он выбирает наугад одну из коробок. Найти вероятность того, что математик вынет в первый раз пустую коробку, в другой коробке окажется r спичек ($r=\overline{0,n}$, n – число спичек, находившихся первоначально в каждой коробке).

2.26 (толстая монета). Какой толщины должна быть монета, чтобы вероятность падения на ребро равнялась бы *1/3*?

2.27. Мишень состоит из десяти кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами $r_1<r_2<...<r_{10}$. Испытание заключается в том, что в круге радиусом r_{10} наудачу выбирается точка. Событие A_k – попадание в круг радиуса r_k, $k=\overline{1,10}$. Найти вероятности следующих событий: а) $B=\bigcup\limits_{k=1}^{6}A_k$; б) $C=\bigcap\limits_{k=5}^{10}A_k$; в) $D=\overline{A_1}A_2$.

2.28. Имеются две параллельные линии телефонной связи длины l, расстояние между которыми $d < l$. Известно, что на каждой линии где-то есть разрыв (конкретное место неизвестно). Найти вероятность того, что расстояние R между точками разрыва будет не больше a ($d<a<\sqrt{l^2+d^2}$).

2.29. Стержень длины *1* произвольным образом разламывается на три части x, y, z. Найти вероятность того, что из получившихся частей можно составить треугольник.

2.30 (парадокс де Мере). Показать, что более вероятно при одновременном бросании четырех костей получить хотя бы одну единицу, чем при *24* бросаниях двух костей получить хотя бы один раз две единицы.

3. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. НЕЗАВИСИМОСТЬ. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Основные понятия и теоремы раздела

Вероятность $P(A \mid B)$ события *А*, вычисленная при условии, что имело место другое событие *В*, называется условной вероятностью события *А* при условии *В*. Для произвольных событий *А* и *В* условная вероятность

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \text{ если } P(B) > 0 .$$

<u>Теорема (сложения вероятностей)</u>. Для любых двух событий *А* и *В* вероятность того, что имеет место либо событие *А*, либо событие *В*, либо оба эти события (объединение событий *А* и *В*), задается формулой

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) .$$

<u>Теорема (умножения вероятностей)</u>. Вероятность совместного наступления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое наступило:

$$P(AB) = P(B)P(A \mid B) = P(A)P(B \mid A) .$$

События *А* и *В* называются *независимыми*, если имеет место равенство $P(AB) = P(A)P(B)$.

События $A_1, ..., A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если для любых k из них ($k \le n$) выполняется соотношение

$$P\left(\prod_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P\left(A_{i_j}\right); \quad i = \overline{1, n} .$$

Если это соотношение выполняется только при $k = 2$, то события называются *попарно независимыми.*

Задачи с решениями

1. В ящике *10* красных и *6* синих шаров. Вынимаются наудачу *2* шара. Какова вероятность того, что они будут одноцветными?

<u>Решение</u>. Пусть K_i – событие, состоящее в том, что при *i*-м испытании $(i = 1,2)$ вынут красный шар, S_i – вынут синий шар, а *A* – что вынуты два шара одного цвета. Тогда справедливо: $A = K_1K_2 + S_1S_2$. Применив теорему сложения вероятностей для несовместных событий, имеем:

$$P(A) = P(K_1K_2) + P(S_1S_2) .$$

Далее можно использовать классическое определение для нахождения вероятностей $P(K_1K_2)$ и $P(S_1S_2)$:

$$P(A) = \frac{k_k}{n} + \frac{k_s}{n} = \frac{C_{10}^2}{C_{16}^2} + \frac{C_6^2}{C_{16}^2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 0,5 .$$

2. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо *2*, либо *5*, либо тому и другому одновременно.

Решение. Событие A – число кратно 2; B – кратно 5; $A \cap B$ – кратно 2 и 5 одновременно. Тогда

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{k_2}{n} + \frac{k_5}{n} - \frac{k_{2и5}}{n} = \frac{45}{90} + \frac{18}{90} - \frac{9}{90} = 0{,}6.$$

3. В одном ящике 5 белых и 10 красных шаров, в другом – 20 белых и 5 красных шаров. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что хотя бы из одного ящика вынут белый шар, K_1 и K_2 – независимые события, означающие, что из первого и второго ящика соответственно вынуты красные шары. Тогда событие A представляется следующим образом: $\overline{A} = K_1 \cap K_2$. Отсюда находим

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{10}{15} \times \frac{5}{25} \approx 1 - 0{,}133 \approx 0{,}867.$$

Примечание. Следует обратить внимание на технологический прием в решении этой и ряда последующих задач, заключающийся в том, что искомый результат находится проще в терминах противоположных событий.

4. Вероятность того, что в течение одной смены возникнет неполадка станка, равна $0{,}05$. События эти независимы. Какова вероятность того, что: а) не произойдут неполадки за три смены; б) неполадка произойдет только в одной смене?

Решение. Пусть A_1, A_2, A_3 – независимые события, состоящие в том, что произойдет неполадка станка в первую, во вторую, в третью смену соответственно, причем $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0{,}05$. Вероятности противоположных событий равны $P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.

а) Обозначим через B событие, состоящее в том, что за все три смены не произойдут неполадки. Это событие можно представить следующим образом $B = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$. Отсюда, используя теорему умножения вероятностей и независимость событий, получаем:

$$P(B) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = (0{,}95)^3 \approx 0{,}853.$$

б) Пусть C означает событие, что неполадка произойдет только в одну из трех смен. Это событие записывается следующим образом:

$$C = A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} + \overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} + \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3.$$

Далее на основании теорем сложения и умножения вероятностей находим вероятность события C:

$$P(C) = P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) =$$

$$= 3 \times 0{,}05 \times (0{,}95)^2 \approx 0{,}135.$$

5. Бросается симметричная монета до первого появления герба (в схеме независимых испытаний). Описать пространство элементарных событий. Найти вероятность того, что потребуется четное число бросков.

Решение. Пусть Γ – выпадение герба и P – выпадение решки. Тогда пространство элементарных событий представляет собой счетное число исходов и описывается следующим образом: $\Omega = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}, \text{РРРГ}, \ldots\}$.

Обозначим через A событие, состоящее в том, что потребуется четное число бросков. Это событие включает в себя каждый второй исход из Ω, т. е. $A = \{\text{РГ}, \text{РРРГ}, \text{РРРРРГ}, \ldots\}$. Отсюда, учитывая независимость выпадения герба и решки и что $P(P) = P(\Gamma) = 0{,}5$, находим, что

$$P(A) = \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{4^k} + \ldots = \frac{1}{3}.$$

Примечание. Поучительный пример для тех, кто, полагаясь на интуицию, считает, что «на равных» можно играть, ставя на четное или нечетное число бросков.

6. Предположим, что вероятность потопить корабль одной торпедой равна *0,6*. Какова вероятность того, что *4* торпеды потопят корабль? Для потопления достаточно одной торпеды, причем «испытания торпедами» независимы.

Решение. Пусть A – событие, означающее, что корабль будет потоплен. Противоположное событие можно представить как произведение независимых событий: $\overline{A} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}$, где $\overline{A_i}$ $(i = \overline{1,4})$ состоит в том, что i-я торпеда не потопит корабль. Применяя теорему умножения для независимых событий, получим искомую вероятность:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4}) =$$
$$= 1 - (1 - 0{,}6)^4 = 0{,}8704.$$

7. В ящике лежат *12* красных, *8* зеленых и *10* синих шаров. Наудачу вынимаются два шара. Какова вероятность, что вынутые шары разного цвета, если известно, что вынут синий шар?

Решение. Введем обозначения: A – событие, состоящее в том, что вынуты два шара разного цвета, если известно, что вынут синий шар; K – вынут красный шар; C – вынут синий шар; Z – вынут зеленый шар (события K, C и Z являются независимыми). Отсюда имеем $A = K \cap C + C \cap Z$. Тогда $P(A) = P(K \cap C) + P(C \cap Z) = P(K) \times P(C) + P(C) \times P(Z)$. Далее получаем

$$P(A) = \frac{C_{12}^1 \times C_{10}^1}{C_{30}^2} + \frac{C_{10}^1 \times C_8^1}{C_{30}^2} \approx 0{,}455.$$

8. Имеются четыре бракованных изделия: на одном повреждена краска (событие A), на другом имеется вмятина (событие B), на третьем – зазубрины (событие C), а на четвертом – одновременно все три указанных дефекта. Являются ли данные события независимыми попарно и в совокупности?

Решение. Так как каждый из трех дефектов имеется у двух изделий, то $P(A) = P(B) = P(C) = 2/4 = 0{,}5$. Любая пара дефектов присутствует только у одного изделия, поэтому вероятность пересечения событий $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(A)P(B) = P(A)P(C) = P(B)P(C) = 0{,}25$. Это означает попарную независимость всех трех событий. С другой стороны,

$P(A\cap B\cap C)=0{,}25$, а $P(A)P(B)P(C)=0{,}5\times 0{,}5\times 0{,}5=0{,}125$, т. е. события *A, B* и *C* не являются независимыми в совокупности.

9. Бросается симметричная игральная кость. Какова вероятность того, что выпадет простое число очков (событие *A*), если известно, что число выпавших очков нечетно (событие *B*)?

Решение. Ясно, что $\Omega=\{\omega:\omega=1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{\omega:\omega=2,3,5\}$, $B=\{\omega:\omega=1,3,5\}$. Тогда $A\cap B=\{\omega:\omega=3,5\}$. Отсюда, применяя формулу условной вероятности, находим: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{2}{6}:\dfrac{3}{6}=\dfrac{2}{3}$.

10. Бросаются 4 игральные кости. Найти вероятность того, что на них выпадет по одинаковому числу очков.

Решение. Обозначим через *B* событие, состоящее в том, что на всех гранях четырех игральных костей выпадет одинаковое число очков. Пусть A_i^1 $(i=\overline{1,4})$ означает, что на грани *i*-й кости выпадет *1*, A_i^2 означает, что выпадет *2*, и т. д., A_i^6 означает, что на грани *i*-й кости выпадет *6*. Событие *B* можно записать как сумму произведений независимых событий: $B=\sum_{k=1}^{6}\left(\prod_{i=1}^{4}A_i^k\right)$. Вероятность $P(B)$ легко находится использованием теорем сложения и умножения вероятностей: $P(B)=6\times\dfrac{1}{6^4}=\dfrac{1}{216}\approx 0{,}005$.

Задачи для самостоятельной работы

3.1. В электрическую цепь последовательно включены *3* элемента, работающие независимо один от другого. Вероятность отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равна $p_1=0{,}1,\ p_2=0{,}2,\ p_3=0{,}2$. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

3.2. Сформулировать и доказать теоремы сложения и умножения вероятностей для любых трех событий *A, B* и *C*.

3.3. Студент пришел на зачет, зная из *30* вопросов только *24*. Какова вероятность сдать зачет, если для этого необходимо ответить на первый попавшийся вопрос или после отказа отвечать на первый вопрос ответить на пять следующих вопросов подряд?

3.4. Гардеробщица выдала одновременно номерки шести лицам, сдавшим в гардероб свои шляпы. После этого она перепутала все шляпы и повесила их наугад. Найти вероятности следующих событий: а) каждому из шести лиц гардеробщица выдаст его собственную шляпу; б) ровно три лица получат свои шляпы; в) ровно два лица получат свои шляпы; г) только одно лицо получит свою шляпу; д) ни одно из шести лиц не получит своей шляпы.

3.5. Разыскивая специальную книгу, студент решил обойти *3* библиотеки. Для всех библиотек одинаково вероятно: в настоящее время искомая книга есть в ее фондах $(p_1=p_2=p_3)$; книга на руках $(q_1=q_2=q_3)$. Что более вероятно – достанет студент книгу или нет, если известно, что библиотеки комплектуются независимо одна от другой?

3.6. В ящике *8* зеленых и *12* синих шаров. Наудачу вынимаются *3* шара. Какова вероятность того, что они будут одного цвета?

3.7. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна *0,1*. Найти вероятность того, что: а) из трех проверенных изделий только одно окажется нестандартным; б) нестандартным окажется четвертое по порядку проверяемое изделие.

3.8. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна *0,7*, для второго – *0,8*. Найти вероятность того, что при одном выстреле каждым стрелком: а) цель будет поражена; б) в цель попадут оба стрелка; в) ни один из стрелков не попадет в цель.

3.9. Вероятность того, что откажет один мотор самолета, равна *0,01*. На самолете *3* мотора. Предполагая, что отказ одного мотора не зависит от работы двух других моторов, найти вероятность того, что откажут все *3* мотора.

3.10. Устройство содержит *2* независимо работающих элемента. Вероятности исправной работы элементов *0,95* и *0,98* соответственно. Найти вероятность отказа устройства, если для этого необходимо, чтобы отказали оба элемента.

3.11. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна *0,2*, второй – *0,3*, третий – *0,4*. Найти вероятность того, что корреспондент услышит вызов радиста, если все вызовы идут независимо друг от друга.

3.12. Бросаются две симметричные игральные кости. Чему равна вероятность того, что сумма выпавших очков равна *8* (событие A), если известно, что эта сумма есть четное число (событие B)?

3.13. Определить вероятность того, что наудачу взятое изделие будет 1-го сорта, если известно, что *4 %* всей продукции – брак, а *75 %* из небракованных изделий соответствует требованиям 1-го сорта.

3.14. В коробке *6* одинаковых пронумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

3.15. Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна *0,02*. Сверла укладываются в коробки по *10* штук. Чему равна вероятность того, что: а) в коробке не окажется бракованных сверл; б) число бракованных изделий окажется не более трех?

3.16. События A и B независимы. Являются ли независимыми события: а) A и $\overline{B}$; б) $\overline{A}$ и B.

3.17. По цели производится n независимых выстрелов. Вероятность попадания при i-м выстреле равна p_i $(i=\overline{1,n})$. Найти вероятность того, что при n выстрелах будет не менее двух попаданий.

3.18. Четыре поздравительных открытки разложены по четырем конвертам с адресами. Найти вероятность того, что: а) хотя бы одна открытка попала в свой конверт; б) ни одна открытка не попала в свой конверт.

3.19. В круг радиуса R вписан квадрат. Чему равна вероятность того, что поставленные независимо внутри круга 2 точки окажутся внутри квадрата?

3.20. Две одинаковые монеты радиуса r расположены внутри круга радиуса R, в который наудачу бросается точка. Определить вероятность того, что эта точка упадет на одну из монет, если монеты «не пересекаются».

3.21. Доказать, что $P(A\,|\,B) \geq 1 - \dfrac{P(\bar{A})}{P(B)}$, $P(B) \neq 0$.

3.22. Пусть события A и B независимы, и независимы также события A и C, при этом $B \cap C = \varnothing$. Доказать, что события A и $B + C$ независимы.

3.23. Сколько раз минимум нужно бросить игральную кость, чтобы с вероятностью, не меньшей $0{,}9$, хотя бы один раз выпала шестерка.

3.24. Баллотируются два кандидата, причем за первого в урну опущено n, а за второго m бюллетеней ($n > m$). Какова вероятность того, что в ходе подсчета бюллетеней число подсчитанных голосов, поданных за первого, все время будет больше числа голосов, поданных за второго?

3.25. Могут ли независимые события быть несовместными (возможные ответы: да, нет). Показать справедливость одного из ответов.

4. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Основные понятия и теоремы раздела

Пусть пространство элементарных событий Ω вероятностной модели (Ω, P) представляется в виде суммы

$$\Omega = H_1 + \ldots + H_n; \; H_i H_j = \varnothing, \; i \neq j \qquad (*)$$

попарно не пересекающихся событий (гипотез) $H_1, \ldots, H_n$; $n > 1$ (на языке классической теории вероятностей эти события называют *полной группой* несовместных событий).

Теорема (о полной вероятности). Если $A \subseteq \Omega$ и имеет место (*), то

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A \mid H_i).$$

Теорема Байеса. Если $A \subseteq \Omega$ и имеет место (*), то

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A \mid H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) P(A \mid H_i)}; \quad \overline{k = 1, n}.$$

Задачи с решениями

1. В урне содержится *4* шара белого и черного цветов. К ним прибавляют *2* белых шара. После этого из урны случайным образом вынимают *3* шара. Найти вероятность того, что все вынутые шары белые, считая равновозможными все предположения о первоначальном содержании урны.

Решение. Пусть *А* – событие, состоящее в том, что вынуты *3* белых шара. Предположения о равновозможном содержании белых и черных шаров в первоначальном составе урны являются гипотезами: H_1 – в урне все шары белые; H_2 – в урне *1* шар черный и *3* белых; H_3 – в урне *2* черных и *2* белых шара; H_4 – в урне *3* черных и *1* белый шар; H_5 – все шары в урне черные. События H_i $(i = \overline{1,5})$ отвечают определению полной группы несовместных событий. Применим для нахождения вероятности $P(A)$ формулу полной вероятности: $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{5} P(H_i) P(A \mid H_i)$, где

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = P(H_5) = 0{,}2 \text{ и}$$

$$P(A \mid H_1) = \frac{C_6^3}{C_6^3}, \; P(A \mid H_2) = \frac{C_5^3}{C_6^3}, \; P(A \mid H_3) = \frac{C_4^3}{C_6^3}, \; P(A \mid H_4) = \frac{C_3^3}{C_6^3}, \; P(A \mid H_5) = \frac{C_2^3}{C_6^3}.$$

Отсюда $P(A) = 0{,}2 \times (1 + 0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}05 + 0) = 0{,}35$.

2. В одной урне *5* белых и *6* черных шаров, а в другой – *4* белых и *8* черных шаров. Из первой урны случайным образом вынимают *3* шара и опускают во вторую урну. После этого из второй урны также случайно вынимают *4* шара. Найти вероятность того, что все шары, вынутые из второй урны, белые.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что все шары, вынутые из второй урны, белые. Вероятность события A зависит от того, какого цвета будут *3* шара, которые переложены из первой урны во вторую. Здесь возможны следующие гипотезы: H_1 – все шары белые; H_2 – *1* шар черный и *2* белые; H_3 – *2* шара черных и *1* белый; H_4 – все шары черные. События H_i $(i=\overline{1,4})$ образуют полную группу несовместных событий на том же пространстве исходов, где имеет место событие A, следовательно, для нахождения $P(A)$ можно применить формулу полной вероятности. Здесь

$$P(H_1)=\frac{C_5^3}{C_{11}^3},\quad P(H_2)=\frac{C_8^1\times C_5^2}{C_{11}^3},\quad P(H_3)=\frac{C_8^2\times C_5^1}{C_{11}^3},\quad P(H_4)=\frac{C_8^3}{C_{11}^3};$$

$$P(A|H_1)=\frac{C_7^4}{C_{15}^4},\quad P(A|H_2)=\frac{C_6^4}{C_{15}^4},\quad P(A|H_3)=\frac{C_5^4}{C_{15}^4},\quad P(A|H_4)=\frac{C_4^4}{C_{15}^4}.$$

$$P(A)=\frac{10}{165}\cdot\frac{35}{1365}+\frac{80}{165}\cdot\frac{15}{1365}+\frac{140}{165}\cdot\frac{5}{1365}+\frac{56}{165}\cdot\frac{1}{1365}\approx 0{,}008.$$

3. В пирамиде стоят *19* винтовок, из них *3* с оптическим прицелом. Стрелок, стреляя из винтовки с оптическим прицелом, может поразить мишень с вероятностью *0,81*, а стреляя из винтовки без оптического прицела, – с вероятностью *0,46*. Найти вероятность того, что стрелок поразит мишень, стреляя из случайно взятой винтовки.

Решение. Пусть A означает событие, состоящее в том, что стрелок поразит мишень, стреляя из случайно взятой винтовки. H_1 – стрелок возьмет винтовку с оптическим прицелом; H_2 – стрелок возьмет винтовку без оптического прицела. Тогда, применяя формулу полной вероятности, имеем:

$$P(A)=(3/19)\times 0{,}81+((19-3)/19)\times 0{,}46\approx 0{,}515.$$

4. В монтажном цехе к устройству присоединяется электродвигатель. Электродвигатели поставляются тремя заводами-изготовителями. На складе имеются электродвигатели названных заводов в количестве *19*, *6* и *11* штук соответственно, которые могут безотказно работать до конца гарантийного срока с вероятностями *0,85*, *0,76* и *0,71* соответственно. Рабочий берет наугад один двигатель и монтирует его к устройству. Найти вероятности того, что смонтированный и работающий безотказно до конца гарантийного срока электродвигатель поставлен: а) первым; б) вторым; в) третьим заводом-изготовителем.

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что наугад взятый и присоединенный к устройству двигатель, будет работать безотказно до конца гарантийного срока; H_1 – гипотеза, означающая, что двигатель изготовлен первым заводом; H_2 – двигатель изготовлен вторым заводом; H_3 – изготовлен третьим заводом. В данной задаче предполагается, что событие A произошло, необходимо только установить, какая гипотеза имела при этом место. Для этого нужно использовать формулу Байеса:

$$P(H_k\mid A)=\frac{P(H_k)P(A\mid H_k)}{P(A)},\quad k=\overline{1,3},$$

$P(A)$ определяется по формуле полной вероятности:

$$P(H_1)=\frac{19}{36},\ P(H_2)=\frac{6}{36},\ P(H_3)=\frac{11}{36}.$$

$$P(A|H_1)=0{,}85,\ P(A|H_2)=0{,}76,\ P(A|H_3)=0{,}71.$$

$$P(A)=\frac{19}{36}\times 0{,}85+\frac{6}{36}\times 0{,}76+\frac{11}{36}\times 0{,}71\approx 0{,}79.$$

а) $P(H_1\,|\,A)=\dfrac{(19/36)\times 0{,}85}{0{,}79}\approx 0{,}57$;

б) $P(H_2\,|\,A)=\dfrac{(6/36)\times 0{,}76}{0{,}79}\approx 0{,}16$;

в) $P(H_3\,|\,A)=\dfrac{(11/36)\times 0{,}71}{0{,}79}\approx 0{,}27$.

5. Из *18* стрелков *5* попадают в мишень с вероятностью *0,8*; *7* – с вероятностью *0,7*; *4* – с вероятностью *0,6* и *2* – с вероятностью *0,5*. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел и поразил мишень. К какой из групп вероятнее всего принадлежал стрелок?

Решение. Чтобы ответить на поставленный вопрос, необходимо определить условные вероятности $P(H_i\,|\,A)$ попадания в мишень стрелками каждой из четырех групп (гипотез). Стрелок будет принадлежать к той группе, чья вероятность будет выше.

$$P(A)=\frac{5}{18}\times 0{,}8+\frac{7}{18}\times 0{,}7+\frac{4}{18}\times 0{,}6+\frac{2}{18}\times 0{,}5\approx 0{,}68.$$

$$P(H_1\,|\,A)=\frac{(5/18)\times 0{,}8}{0{,}68}\approx 0{,}32;\ P(H_2\,|\,A)=\frac{(7/18)\times 0{,}7}{0{,}68}\approx 0{,}4;$$

$$P(H_3\,|\,A)=\frac{(4/18)\times 0{,}6}{0{,}68}\approx 0{,}2;\ P(H_4\,|\,A)=\frac{(2/18)\times 0{,}5}{0{,}68}\approx 0{,}08.$$

Вероятнее всего, выстрел произвел стрелок из второй группы, в которой вероятность попадания в мишень равна *0,7* (хотя, быть может, кому-то показалось, что выстрел произвел стрелок из первой группы, так как вероятность поражения мишени стрелком этой группы равна *0,8*).

6. Предположим, что *5 %* всех мужчин и *0,25 %* всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина? (Считать, что мужчин и женщин одинаковое число.)

Решение. В предположении о том, что число мужчин и женщин одинаково, вероятности гипотез (H_1 – выбран мужчина, H_2 – выбрана женщина) равны между собой и равны *0,5*. Тогда, применяя формулу Байеса, находим вероятность того, что это мужчина:

$$P(H_1\,|\,A)=\frac{0{,}5\times 0{,}05}{0{,}5\times 0{,}05+0{,}5\times 0{,}25}=0{,}1(6).$$

7. Изделие проверяется на стандартность одним из двух товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу, равна *0,55*, а ко второму – *0,45*. Вероятность того, что изделие будет признано стандартным для первого товароведа, равна *0,9*, а для второго – *0,98*. При проверке изделие было

признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверил второй товаровед.

<u>Решение</u>. Событие *A*, состоящее в том, что изделие стандартно, свершилось. Необходимо найти вероятность того, это изделие проверил второй товаровед. Применим формулу Байеса:

$$P(H_2 \mid A) = \frac{0{,}45 \times 0{,}98}{0{,}55 \times 0{,}9 + 0{,}45 \times 0{,}98} \approx 0{,}47 .$$

8. В специализированную больницу поступают в среднем *50 %* больных с заболеванием *K*, *30 %* – с заболеванием *L* и *20 %* – с заболеванием *M*. Вероятность полного излечения болезни *K* равна *0,7*; для болезней *L* и *M* вероятности соответственно равны *0,8* и *0,9*. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием *K*.

<u>Решение</u>. Обозначим через *A* событие, заключающееся в том, что больной выздоровел, а через *K*, *L* и *M* – то, что он страдал одним из трех заболеваний. Для определения искомой вероятности применим формулу Байеса:

$$P(K \mid A) = \frac{0{,}5 \times 0{,}7}{0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}9} \approx 0{,}45 .$$

9. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых автомашин, проезжающих по тому же шоссе, как *3:2*. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна *0,1*; для легковой машины эта вероятность равна *0,2*. К бензоколонке подъехала машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

<u>Решение</u>. Так как соотношение грузовых и легковых машин составляет *3:2*, обозначим число грузовых за *3n*, а число легковых за *2n* машин. Пусть *A* – событие, означающее, что машина подъехала к бензоколонке, H_1 и H_2 – гипотезы, означающие, что это грузовая или легковая машины соответственно. Искомую вероятность находим по формуле

$$P(H_1 \mid A) = \frac{(3n/5n) \times 0{,}1}{(3n/5n) \times 0{,}1 + (2n/5n) \times 0{,}2} \approx 0{,}43 .$$

10. Вероятность того, что во время работы ЭВМ произойдет сбой в арифметическом устройстве (АУ), в оперативной памяти (ОП), в остальных устройствах (ОУ), относятся как *3:2:5*. Вероятности обнаружения сбоя в АУ, ОП и в ОУ соответственно равны *0,8*, *0,9* и *0,9*. Найти вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен.

<u>Решение</u>. Пусть *A* – событие, означающее, что сбой будет обнаружен; H_1 – сбой был в АУ; H_2 – сбой в ОП; H_3 – сбой в ОУ. Обозначим вероятности гипотез через p_1, p_2 и p_3 соответственно. Используя заданное соотношение (*3:2:5*), найдем эти вероятности: p_1 = 0,3, p_2 = 0,2, p_3 = 0,5. Для определения $P(A)$ применим формулу полной вероятности, тогда

$$P(A) = 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}9 + 0{,}5 \times 0{,}9 = 0{,}87 .$$

Задачи для самостоятельной работы

4.1. Имеются два одинаковых ящика с шарами. В первом ящике *2* белых и *1* черный шар, во втором – *1* белый и *4* черных шара. Наудачу выбирают один ящик и вынимают из него шар. Какова вероятность, что вынутый шар окажется белым?

4.2. При помещении в урну тщательно перемешанных n шаров (m белых и $n - m$ черных) один шар неизвестного цвета затерялся. Из оставшихся в урне $n - 1$ шаров наудачу вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется белым?

4.3. В цехе работают *20* станков. Из них *10* марки *A*, *6* марки *B* и *4* марки *C*. Вероятности того, что качество детали окажется отличным, для этих станков соответственно равны: *0,9*, *0,8* и *0,7*. Какой процент отличных деталей выпускает цех в целом?

4.4. Имеются две урны: в первой *3* белых шара и *2* черных, во второй *4* белых и *4* черных. Из первой урны во вторую перекладывают наугад два шара. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

4.5. Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка *0,8*, для второго – *0,4*. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что в мишень попал первый стрелок.

4.6. На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит *25 %*, вторая – *35 %*, третья – *40 %* всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно *5 %*, *4 %* и *2 %*.

а) Какова вероятность того, что случайно выбранный болт дефектный?

б) Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен второй машиной?

4.7. В пункте проката имеется *10* телевизоров, для которых вероятность исправной работы в течение месяца равна *0,9*, и *5* телевизоров с вероятностью, равной *0,95*. Найти вероятность того, что два телевизора, взятые наудачу в пункте проката, будут работать исправно в течение месяца.

4.8. В одной урне содержится *1* белый и *2* черных шара, а в другой урне – *2* белых и *3* черных шара. В третью урну кладут два шара из первой урны и два шара из второй.

а) Какова вероятность того, что шар, извлеченный из третьей урны, будет белым?

б) Найти вероятность того, что при выборе с возвращением из третьей урны двух шаров один из них будет белым, а другой – черным.

в) Найти вероятность того, что при выборе без возвращения из третьей урны двух шаров один из них будет черным, а второй – белым.

4.9. При переливании крови надо учитывать группы крови (ГК) донора и больного. Человеку, имеющему четвертую ГК, можно перелить кровь любой группы; человеку со второй или третьей ГК можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; человеку с первой ГК можно перелить только кровь своей группы. Среди населения *33,7 %* имеют 1-ю, *37,5 %* – 2-ю, *20,9 %* – 3-ю и *7,9 %* – 4-ю ГК. Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

4.10. В стройотряде *70 %* первокурсников и *30 %* студентов второго курса. Среди первокурсников *10 %* девушек, а среди второкурсников – *5 %* девушек. Все девушки по очереди дежурят на кухне. Найти вероятность того, что в случайно выбранный день на кухне дежурит первокурсница.

4.11. При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить заболевание туберкулезом у больного туберкулезом равна $1-\beta$. Вероятность принять здорового за больного равна α. Пусть доля больных туберкулезом по отношению ко всему населению равна γ. Найти условную вероятность того, что человек здоров, если он признан больным при обследовании.

4.12. Из полного набора костей домино наугад берутся две кости. Определить вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой.

4.13. Для контроля продукции из трех партий деталей взята для испытания одна деталь. Как велика вероятность обнаружения бракованной продукции, если в одной партии *2/3* деталей бракованные, а в двух других – все доброкачественные?

4.14. Радиолампа может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями *0,25*, *0,5* и *0,25* соответственно. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов, равны для этих партий *0,1*, *0,2* и *0,4*. Определить вероятность того, что лампа проработает заданное число часов.

4.15. Определить вероятность того, что *100* лампочек, взятых наудачу из *1000*, окажутся исправными, если известно, что число испорченных лампочек на *1000* штук равно возможно от *0* до *5*.

4.16. В сосуд, содержащий n шаров, опущен белый шар. Какова вероятность извлечь из этого сосуда белый шар, если все предположения о первоначальном числе белых шаров равновозможны?

4.17. В ящике находятся *15* теннисных мячей, из которых *9* новых. Для первой игры наугад берутся три мяча, которые после игры возвращаются в ящик. Для второй игры также наугад берутся три мяча. Найти вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры, новые.

4.18. В правом кармане имеются три монеты по *50* копеек и четыре монеты по *10* копеек, а в левом – шесть по *50* копеек и три по *10* копеек. Из правого кармана в левый наудачу перекладывают *5* монет. Определить вероятность извлечения из левого кармана после перекладывания монет монеты в *50* копеек, если эта монета берется наудачу.

4.19. В одной из двух урн, в каждой из которых по *10* шаров, *1* шар отмечен. Играющий имеет право последовательно извлечь *20* шаров из любой урны, каждый раз возвращая извлеченный шар обратно. Как следует вести игру, чтобы вероятность извлечения отмеченного шара была наибольшей, если вероятность того, что отмеченный шар находится в первой урне, равна *2/3*?

4.20. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем *2/5* сообщений «точка» и *1/3* сообщений «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в отношении *5:3*. Определить вероятность того, что передаваемый сигнал принят, если: а) принят сигнал «точка»; б) принят сигнал «тире».

4.21. Известно, что *96 %* выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью *0,98* и нестандартную – с вероятностью *0,05*. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту.

4.22. Из двух близнецов первый – мальчик. Какова вероятность, что другой тоже мальчик, если среди близнецов вероятности рождения двух мальчиков и двух девочек соответственно равны a и b, а для разнополых близнецов вероятность родиться первым для обоих полов одинакова?

4.23. Принимая, что вероятность рождения однополых близнецов вдвое больше, чем разнополых, вероятности рождения близнецов разного пола в любой последовательности одинаковыми, а вероятность рождения в двойне первым мальчика равной *0,51*, определить вероятность рождения второго мальчика, если первым родился мальчик.

4.24. В первой урне находятся *1* белый и *9* черных шаров, а во второй – *1* черный и *5* белых шаров. Из каждой урны по схеме случайного выбора без возвращения удалили по одному шару, а оставшиеся шары ссыпали в третью урну. Найти вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны, окажется белым.

4.25. По каналу связи передается одна из последовательностей букв *AAAA, BBBB, CCCC* с вероятностями $p_1, p_2, p_3 \quad (p_1 + p_2 + p_3 = 1)$. Каждая передаваемая буква принимается правильно с вероятностью α и с вероятностями $0{,}5(1-\alpha)$ и $0{,}5(1-\alpha)$ принимается за две другие буквы. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что было передано *AAAA*, если принято *ABCA*.

4.26. В течение месяца в порт нефтеперерабатывающего завода приходят независимо друг от друга два танкера одинакового тоннажа. Технико-экономические условия для данного завода таковы, что завод может выполнить месячный заказ, если придет хотя бы один из этих танкеров в течение первых пяти суток месяца; завод не выполнит заказ, если в начале месяца не придет ни один танкер. Вероятность прихода каждого танкера в течение первых пяти суток постоянна и равна *0,1*. Доставленная в начале месяца нефть обеспечивает выполнение плана с вероятностью *0,05*, если придет только один танкер, и с вероятностью *0,2*, если придут оба танкера. Завод выполнил план. Определить число танкеров, прибывших в течение первых пяти суток месяца, вероятность которого наибольшая.

4.27 (тройственная дуэль). Три человека – назовем их ***A***, ***B*** и ***C*** – устроили дуэль по следующему правилу. Они бросают жребий, который равновероятно выдает им номера *1*, *2* и *3*. После этого они поочередно стреляют в порядке своих номеров: *N1*, *N2*, *N3*, *N1*, *N2*, ... Каждый раз стреляющий выбирает, в кого он будет стрелять, а убитый, естественно, выбывает из очереди. Дуэль продолжается, пока не останется в живых только один из участников.

Требуется найти для каждого дуэлянта оптимальную тактику поведения и вероятность остаться в живых, если ***A*** убивает противника наверняка, ***B*** – в *80 %* случаев, а ***C*** – в *50 %*, и участникам дуэли это известно.

5. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Основные понятия раздела

Случайная величина – это переменная, которая в результате опыта E может принять то или иное числовое значение в зависимости от случайных обстоятельств, которые выпадают из круга рассматриваемых условий S, но сопутствующих каждому испытанию.

Случайная величина называется *дискретной*, если она может принимать только конечное или счетное множество значений.

Всякое соотношение, устанавливающее зависимость между возможными значениями СВ и их вероятностями, называется *законом распределения вероятностей* (*ЗРВ*). ЗРВ дискретной случайной величины можно представить в виде графика, таблицы или задать аналитически (ряд распределения, функция распределения).

Пусть X – случайная величина, а x – произвольное действительное число. Вероятность того, что X примет значение, меньшее чем x, называется *функцией распределения вероятностей* СВ X:

$$F_X(x) = P\{X < x\}.$$

Основные свойства функции распределения вероятностей.

F1. <u>Свойство монотонности</u>: функция распределения есть неубывающая функция, т.е. $F_X(x_2) \ge F_X(x_1)$, если $x_2 \ge x_1$.

F2. <u>Свойство ограниченности</u>: $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

F3. <u>Свойство непрерывности слева</u>: $F_X(x-0) = F_X(x)$.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется число

$$M[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P\{X = x_i\}, \qquad (*)$$

если существует (абсолютно сходится) сумма (*).

<u>Основные свойства математического ожидания</u>.

M1. Математическое ожидание константы равняется самой константе: $M[c] = c$, где c – константа.

M2. Математическое ожидание от суммы случайных величин равняется сумме математических ожиданий этих величин: $M[X_1 + X_2] = M[X_1] + M[X_2]$.

M3. Математическое ожидание ограниченной случайной величины ограничено: если $a \le X \le b$, то $a \le M[X] \le b$. Всегда $M[X] \le M[|X|]$.

M4. Если $X \ge 0$ и $M[X] = 0$, то $X = 0$ с вероятностью единица.

M5. Для произвольной функции $\varphi(\cdot)$ случайная величина $Y = \varphi(X)$ имеет математическое ожидание $M[Y] = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(x_i) P\{X = x_i\}$, если ряд существует (сходится абсолютно).

М6. Если X и Y – взаимно независимые случайные величины с конечными математическими ожиданиями, то их произведение является случайной величиной с конечным математическим ожиданием: $M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$.

Моментом k-го порядка случайной величины X относительно константы C называется математическое ожидание $\gamma_k[X, C] = M\left[(X - C)^k\right]$.

При $C = M[X]$ момент $\gamma_k[\cdot]$ называют *центральным* и обозначают:

$\mu_k[X] = \gamma_k[X, M[X]] = M\left[(X - M[X])^k\right]$.

При $C = 0$ момент $\gamma_k[\cdot]$ называют *начальным* и обозначают:

$\alpha_k[X] = \gamma_k[X, 0] = M\left[X^k\right]$.

Факториальным моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание $f_k[X] = M[X(X-1)\ldots(X-k+1)]$.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата уклонения X от ее математического ожидания

$D[X] = M\left[(X - M[X])^2\right] = \mu_2[X]$.

Нетрудно убедиться, что $D[X] = M\left[X^2\right] - M^2[X]$.

Величина $\sigma[X]$ называется *стандартным уклонением*: $\sigma^2[X] = D[X]$.

Основные свойства дисперсии.

D1. Дисперсия – величина неотрицательная: $D[X] \geq 0$. Дисперсия постоянной равняется нулю: $D[X] = 0$ тогда и только тогда, когда $P\{X = C\} = 1$, где C – константа.

D2. Постоянный множитель выносится за знак дисперсии в квадрате: $D[CX] = C^2 D[X]$. Постоянное слагаемое не влияет на величину дисперсии этой величины: $D[X + C] = D[X]$.

D3. Дисперсия суммы независимых случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий: $D[X + Y] = D[X] + D[Y]$.

Задачи с решениями

1. В урне *5* белых и *25* черных шаров. Вынимается *2* шара. Случайная величина X – число вынутых белых шаров. Построить ряд распределения и функцию распределения вероятностей величины X.

Решение. Вынимается *2* шара. Здесь возможны следующие ситуации: оба шара черные, один черный и один белый, оба шара белые. Следовательно, случайная величина X может принимать три значения: *0*, *1*, *2*. Найдем вероятности, с которыми эти значения принимаются:

$$P\{X = 0\} = \frac{C_{25}^2}{C_{30}^2} \approx 0{,}69; \; P\{X = 1\} = \frac{C_{25}^1 \times C_5^1}{C_{30}^2} \approx 0{,}29; \; P\{X = 2\} = \frac{C_5^2}{C_{30}^2} \approx 0{,}02.$$

Условие нормировки выполняется: $P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = 1$.

Запишем ряд распределения вероятностей:

X	0	1	2
P	0,69	0,29	0,02

Построим функцию распределения заданной случайной величины на основе ее определения:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ 0{,}69, \text{ если } 0 < x \le 1, \\ 0{,}98, \text{ если } 1 < x \le 2, \\ 1, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

2. Случайная величина *X* задана рядом распределения:

X	–2	–1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Требуется: а) построить многоугольник распределения; б) построить функцию распределения и начертить ее график; в) найти вероятность того, что величина *X* примет значение, непревосходящее по абсолютной величине *1*.

<u>Решение</u>.

а) Многоугольник распределения представляет собой графическое изображение ряда распределения (рис. 5.1).

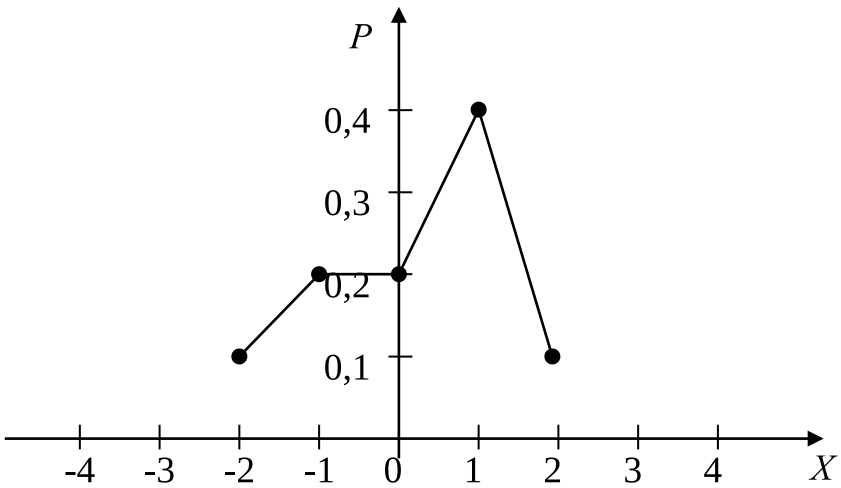


Рис. 5.1. Многоугольник распределения, заданного таблицей

б) По определению $F_X(x) = P\{X < x\}$. Для построения функции распределения в качестве *x* будем брать значения *X* из заданного ряда распределения. Тогда в соответствии с определением имеем

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le -2, \\ 0{,}1, & \text{если} \quad -2 < x \le -1, \\ 0{,}3, & \text{если} \quad -1 < x \le 0, \\ 0{,}5, & \text{если} \quad 0 < x \le 1, \\ 0{,}9, & \text{если} \quad 1 < x \le 2, \\ 1, & \text{если} \quad x > 2. \end{cases}$$

Построим график функции распределения вероятностей случайной величины X (рис. 5.2).

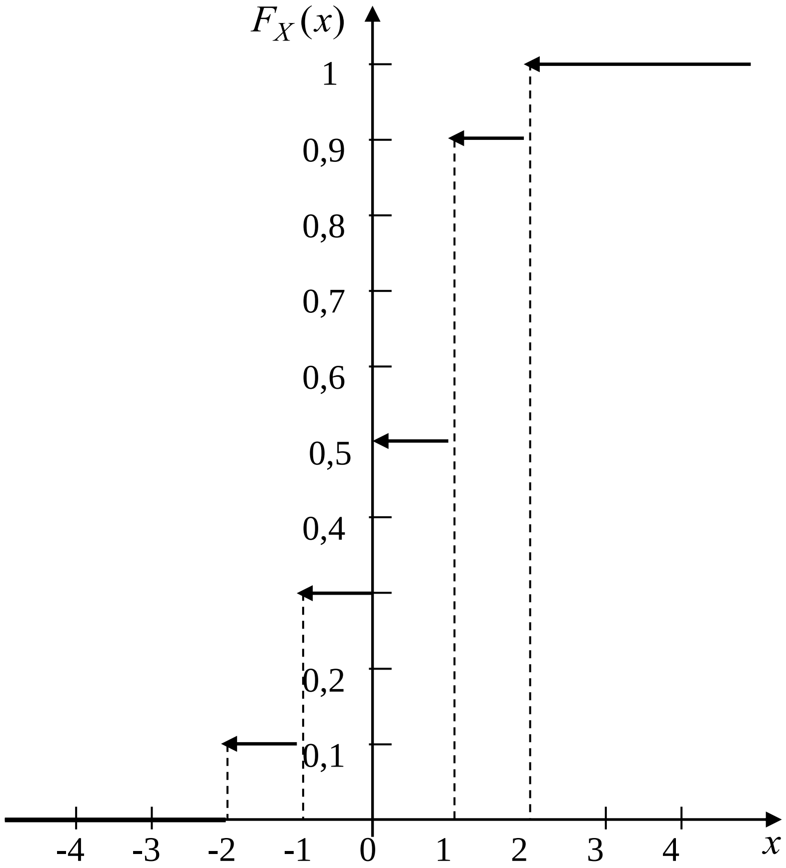


Рис. 5.2. Функция распределения вероятностей случайной величины X

в) Используя свойства функции распределения, находим искомую вероятность:

$$P\{|X| \le 1\} = P\{-1 \le X \le 1\} = P\{X \le 1\} - P\{X < -1\} = P\{X \le 1\} - F_X(-1) =$$

$$= P\{X < 1\} + P\{X = 1\} - F_X(-1) = F_X(1) - F_X(-1) + P\{X = 1\} = 0{,}5 - 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}8\,.$$

3. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины X – числа попаданий мячом в корзину при двух независимых бросках, если вероятность попадания при одном броске равна *0,4*. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. Заданная случайная величина принимает три значения *0*, *1*, *2* со следующими вероятностями:

$$P\{X = 0\} = (1-0{,}4)\times(1-0{,}4) = 0{,}36;$$

$$P\{X = 1\} = 0{,}4\times(1-0{,}4) + (1-0{,}4)\times 0{,}4 = 0{,}48;$$

$$P\{X = 2\} = 0{,}4\times 0{,}4 = 0{,}16.$$

Условие нормировки выполняется: $P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = 1$.

Ряд распределения выглядит следующим образом:

X	0	1	2
P	0,36	0,48	0,16

Функция распределения имеет вид

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ 0{,}36, \text{ если } 0 < x \le 1, \\ 0{,}84, \text{ если } 1 < x \le 2, \\ 1, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

Заданная случайная величина является дискретной. Математическое ожидание дискретной величины определяется как сумма произведений значений случайной величины на вероятности, с которыми эти значения принимаются. Тогда $M[X] = 0 \times 0{,}36 + 1 \times 0{,}48 + 2 \times 0{,}16 = 0{,}8$.

Используя свойства математического ожидания и определение дисперсии, находим: $D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = 0^2 \times 0{,}36 + 1^2 \times 0{,}48 + 2^2 \times 0{,}16 - 0{,}8^2 = 0{,}48$.

4. Из партии в *25* изделий, среди которых имеются *6* бракованных, выбраны случайным образом *3* изделия для проверки их качества. Построить ряд распределения случайного числа *X* бракованных изделий, содержащихся в выборке. Найти начальные, центральные и факториальные моменты четырех первых порядков.

Решение. Случайная величина *X* может принимать следующие значения: *0, 1, 2, 3*. Определим соответствующие вероятности:

$$P\{X = 0\} = \frac{C_{25-6}^3}{C_{25}^3} = 0{,}421; \; P\{X = 1\} = \frac{C_6^1 \times C_{25-6}^2}{C_{25}^3} = 0{,}446;$$

$$P\{X = 2\} = \frac{C_6^2 \times C_{25-6}^1}{C_{25}^3} = 0{,}124; \; P\{X = 3\} = \frac{C_6^3}{C_{25}^3} = 0{,}009.$$

Условие нормировки выполняется: $P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = 1$.

Ряд распределения выглядит следующим образом:

X	0	1	2	3
P	0,421	0,446	0,124	0,009

По определению начальный момент *k*-го порядка есть математическое ожидание случайной величины в степени *k*, т. е. $\alpha_k[X] = M[X^k]$. Используя эту формулу, находим:

$$\alpha_1[X] = M[X] = 0 \times 0{,}421 + 1 \times 0{,}446 + 2 \times 0{,}124 + 3 \times 0{,}009 = 0{,}721;$$

$$\alpha_2[X] = M[X^2] = 0^2 \times 0{,}421 + 1^2 \times 0{,}446 + 2^2 \times 0{,}124 + 3^2 \times 0{,}009 = 1{,}023;$$

$$\alpha_3[X] = M[X^3] = 0^3 \times 0{,}421 + 1^3 \times 0{,}446 + 2^3 \times 0{,}124 + 3^3 \times 0{,}009 = 1{,}681;$$

$$\alpha_4[X] = M[X^4] = 0^4 \times 0{,}421 + 1^4 \times 0{,}446 + 2^4 \times 0{,}124 + 3^4 \times 0{,}009 = 3{,}447.$$

По определению центральный момент *k*-го порядка есть величина, определяемая по формуле: $\mu_k[X] = M[(X - M[X])^k]$. На основе этой формулы и результатов вычисления $\alpha_k[X]$ находим

$$\mu_1[X] = M[(X - M[X])^1] = M[X] - M[X] = 0;$$

$$\mu_2[X] = M[(X-M[X])^2] = M[X^2 - 2X \times M[X] - (M[X])^2] =$$
$$= M[X^2] - (M[X])^2 = D[X] = \alpha_2[X] - (\alpha_1[X])^2 = 1{,}023 - (0{,}721)^2 = 0{,}503;$$
$$\mu_3[X] = M\left[(X - M[X])^3\right] = M[X^3 - 3X^2 \times M[X] + 3X \times (M[X])^2 - (M[X])^3] =$$
$$= M[X^3] - 3M[X^2] \times M[X] + 3M[X] \times (M[X])^2 - (M[X])^3 =$$
$$= \alpha_3[X] - 3\alpha_2[X] \times \alpha_1[X] + 3\alpha_1[X] \times (\alpha_1[X])^2 - (\alpha_1[X])^3 =$$
$$= 1{,}681 - 3 \times 1{,}023 \times 0{,}721 + 3 \times 0{,}721 \times (0{,}721)^2 - (0{,}721)^3 = 0{,}649;$$
$$\mu_4[X] = M\left[(X - M[X])^4\right] =$$
$$= M[X^4 - 4X^3 M[X] + 6X^2 (M[X])^2 - 4X(M[X])^3 + (M[X])^4] =$$
$$= \alpha_4[X] - 4\alpha_3[X]\alpha_1[X] + 6\alpha_2[X](\alpha_1[X])^2 - 3(\alpha_1[X])^4 =$$
$$= 3{,}447 - 4 \times 1{,}681 \times 0{,}721 + 6 \times 1{,}023 \times (0{,}721)^2 - 3 \times (0{,}721)^4 = 1{,}344 .$$

Факториальный момент k-го порядка определяется следующим образом: $f_k[X] = M[X \times (X-1) \times (X-2) \times \ldots \times (X-k+1)]$. Отсюда находим

$$f_1[X] = M[X] = \alpha_1[X] = 0{,}721;$$
$$f_2[X] = M[X \times (X-1)] = M[X^2] - M[X] = \alpha_2[X] - \alpha_1[X] = 1{,}023 - 0{,}721 = 0{,}302;$$
$$f_3[X] = M[X \times (X-1) \times (X-2)] = M[X^3] - 3M[X^2] + 2M[X] =$$
$$= \alpha_3[X] - 3\alpha_2[X] + 2\alpha_1[X] = 1{,}681 - 3 \times 1{,}023 + 2 \times 0{,}721 = 0{,}054;$$
$$f_4[X] = M\left[X \times (X-1) \times (X-2) \times (X-3)\right] = M[X^4] - 6M[X^3] + 11M[X^2] - 6M[X] =$$
$$= \alpha_4[X] - 6\alpha_3[X] + 11\alpha_2[X] - 6\alpha_1[X] =$$
$$= 3{,}447 - 6 \times 1{,}681 + 11 \times 1{,}023 - 6 \times 0{,}721 = 0{,}288.$$

5. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X равны соответственно *2* и *10*. Найти математическое ожидание и дисперсию величины $Y = 2X + 5$.

Решение. Зная свойства математического ожидания и дисперсии для линейного преобразования случайной величины, находим:

$$M[Y] = M[2X+5] = M[2X] + M[5] = 2 \times M[X] + 5 = 2 \times 2 + 5 = 9;$$
$$D[Y] = D[2X+5] = D[2X] + D[5] = 4 \times D[X] + 0 = 40.$$

6. Найти широту и среднеквадратическое отклонение случайной величины, заданной рядом распределения:

X	3	5	7	9
P	0,4	0,3	0,2	0,1

Решение. По определению широта есть разность между максимальным и минимальным значениями случайной величины. Обозначив широту через $A[X]$, находим $A[X] = 9 - 3 = 6$.

Среднеквадратическое отклонение есть корень квадратный из дисперсии. Найдем дисперсию по формуле $D[X] = M[X^2] + (M[X])^2$:

$$D[X] = 3^2 \times 0{,}4 + 5^2 \times 0{,}3 + 7^2 \times 0{,}2 + 9^2 \times 0{,}1 -$$
$$-(3 \times 0{,}4 + 5 \times 0{,}3 + 7 \times 0{,}2 + 9 \times 0{,}1)^2 = 29 - 25 = 4.$$

Отсюда получаем $\sigma[X] = 2$.

7. Найти математическое ожидание и дисперсию: а) числа очков, выпадающих при бросании одной симметричной игральной кости; б) суммы очков, выпадающих при бросании *n* игральных костей.

Решение.

а) Прежде чем найти математическое ожидание и дисперсию, запишем закон распределения вероятностей данной случайной величины:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$M[X]=\frac{1}{6}\times(1+2+3+4+5+6)=3{,}5\,;$$

$$D[X]=\frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)-(3{,}5)^2\approx 15{,}17-12{,}25\approx 2{,}92\,.$$

б) Обозначим через *Y* случайную величину, представляющую собой сумму из *n* величин *X*. Зная, что математическое ожидание суммы случайных величин равняется сумме математических ожиданий этих величин, получаем: $M[Y]=3{,}5\times n$.

Величины, образующие *Y*, независимы (по условию эксперимента). В этом случае дисперсия также равняется сумме дисперсий, т. е. $D[Y]=1{,}25\times n$`.

8. Найти математическое ожидание и дисперсию числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено *40* билетов, причем вероятность выигрыша равна *0,05*.

Решение. Случайная величина *X* – число лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, подчиняется биномиальному закону распределения с параметрами: $n=40$ и $p=0{,}05$. Зная свойства этого распределения, находим: $M[X]=n\times p=40\times 0{,}05=2$;

$$D[X]=n\times p\times(1-p)=40\times 0{,}05\times(1-0{,}05)=1{,}9\,.$$

9. Распределение дискретной случайной величины *X* определяется формулой

$$P\{X=k\}=\frac{C}{k(k+1)(k+2)},\quad k=1,2,\dots.$$

Найти постоянную *C* и вероятность $P\{X\geq 3\}$.

Решение. Постоянную *C* находим из условия нормировки:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C}{k(k+1)(k+2)}=1\,.$$

Вынесем *C* за знак суммы и преобразуем равенство к следующему виду:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{C}\,.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k}-2\times\frac{1}{2}-2\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{4}.$$

Следовательно, $C = 4$.

Найдем теперь вероятность события, состоящего в том, что *X* примет значение, большее или равное *3*:

$$P\{X \geq 3\} = 1 - P\{X < 3\} = 1 - \left(\frac{4}{1 \times 2 \times 3} + \frac{4}{2 \times 3 \times 4}\right) = \frac{1}{6}.$$

10. Случайные величины *X* и *Y* независимы, причем $M[X] = 2$, $D[X] = 1$, $M[Y] = 1$, $D[Y] = 4$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины $Z = 2X + Y$.

Решение. Зная свойства математического ожидания и дисперсии, находим: $M[Z] = M[2X + Y] = 2M[X] + M[Y] = 2 \times 2 + 1 = 5$;

$$D[Z] = D[2X + Y] = 4D[X] + D[Y] = 4 \times 1 + 4 = 8.$$

Задачи для самостоятельной работы

5.1. Случайная величина *X* может принимать любое целое положительное значение *n* с вероятностью, пропорциональной $(1/3)^n$. Найти математическое ожидание величины *X*.

5.2. В партии хлопка *20 %* коротких волокон. Случайно отбирается *n* волокон. Найти математическое ожидание и дисперсию числа коротких волокон среди случайно отобранных.

5.3. Найти математическое ожидание и дисперсию индикатора события *A*, вероятность наступления которого равна *p*.

5.4. Число α-частиц, достигающих счетчика в некотором опыте, является случайной величиной *X*, распределенной по следующему закону:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,021	0,081	0,156	0,201	0,195	0,151	0,097	0,064	0,026	0,001	0,007

Найти: а) математическое ожидание и дисперсию числа частиц, достигающих счетчика; б) вероятность того, что число частиц, достигших счетчика, не меньше четырех.

5.5. Бросаются две игральные кости. Пусть *X* – сумма очков, выпадающих на их верхних гранях. Написать закон распределения случайной величины *X*.

5.6. Бросается *n* игральных костей. Найти математическое ожидание, дисперсию и центральный момент третьего порядка суммы очков на всех костях.

5.7. Дан ряд распределения случайной величины *X*:

X	2	4	6	8
P	0,2	0,3	0,4	0,1

Найти начальные и центральные моменты первых четырех порядков.

5.8. Производятся независимые испытания трех приборов. Вероятность отказа каждого прибора соответственно равна p_1, p_2 и p_3. Показать, что математическое ожидание числа отказавших приборов равно $p_1 + p_2 + p_3$.

5.9. Производится *30* независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления успеха равна *0,2*. Найти математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение числа появления успехов в этих испытаниях.

5.10. Производится три независимых опыта, в каждом из которых с равной вероятностью может быть получено целое число от *0* до *9*. Построить ряд распределения суммы полученных чисел.

5.11. Производятся независимые испытания, в каждом из которых с вероятностью *0,8* может произойти событие *A*. Испытания производятся до первого появления события *A*. Общее число испытаний не больше *4*. Найти математическое ожидание произведенных испытаний.

5.12. Распределение случайной величины *X* определяется формулой

$$P\{X = k\} = \frac{1}{k(k+1)}, \quad k = 1,2,\ldots .$$

Найти математическое ожидание *X*.

5.13. В партии из *10* деталей имеются *8* стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения вероятностей числа стандартных деталей среди отобранных.

5.14. Распределение дискретной случайной величины задано рядом распределения:

X	–2	–1	0	1	2
P	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

Найти математическое ожидание *Y*, если $Y = -X$, и математическое ожидание *Z*, если $Z = |X|$.

5.15. В партии *10 %* нестандартных деталей. Наудачу отобраны *4* детали. Написать закон распределения вероятностей случайной величины *X* – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить функцию распределения вероятностей.

5.16. Бросают *n* игральных костей. Найти математическое ожидание числа таких бросаний, в каждом из которых выпадет ровно *m* шестерок, если общее число бросаний равно *N*.

5.17. В партии из *10* деталей содержится *3* нестандартных. Наудачу отобраны *2* детали. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины *X* – числа нестандартных деталей среди двух отобранных.

5.18. Брошены две игральные кости. Найти математическое ожидание суммы очков, если известно, что выпали разные грани.

5.19. Бросаются три монеты. Требуется задать случайную величину *X*, равную числу выпавших «решеток», построить ряд распределения и функцию распределения величины *X*, если вероятность выпадения «герба» равна *0,5*.

5.20. Доказать, что если *X* и *Y* независимы, то $D[X \cdot Y] \geq D[X] \cdot D[Y]$.

5.21. Из партии, содержащей *100* изделий, среди которых имеется *10* дефектных, выбраны случайным образом *5* изделий для проверки их качества. Построить ряд распределения случайного числа X дефектных изделий, содержащихся в выборке.

5.22. Изделия испытываются при перегрузочных режимах. Вероятности для каждого изделия пройти испытание равны *0,8*. Испытания независимы и заканчиваются после обнаружения первого изделия, не выдержавшего испытаний. Вывести формулу для ряда распределения числа испытаний.

5.23. На пути движения автомашины четыре светофора. Каждый из них с вероятностью *0,5* либо разрешает, либо запрещает автомашине дальнейшее движение. Построить многоугольник распределения вероятностей числа светофоров, пройденных автомашиной без остановки.

5.24. Рабочий обслуживает n однотипных станков, расположенных на одной прямой. Расстояние между каждыми двумя соседними станками одинаково и равно a. Закончив обслуживание какого-либо станка, рабочий переходит к тому станку, который раньше других потребовал его внимания. Вероятности перехода от станка к станку равны между собой. Найти математическое ожидание длины перехода, совершаемого рабочим.

5.25. Какому условию должны удовлетворять независимые случайные величины X и Y, чтобы $D[X \cdot Y] = D[X] \cdot D[Y]$.

5.26 (задача об оценке). Урна содержит шары, снабженные номерами от *1* до N. Пусть X – наибольший номер, полученный в результате n извлечений, если производится случайный выбор с возвращением. Событие $X \le k$ означает, что каждый из извлеченных номеров не превосходит k, так что $P\{X \le k\} = (k / N)^n$. Найти математическое ожидание величины X.

6. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Основные понятия раздела

Функции, представимые в виде $F_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p_X(t)\,dt$, называются *абсолютно непрерывными функциями распределения*. Функция $p_X(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей*.

Свойства плотности распределения вероятностей:

P1. $p_X(x)\ge 0$.

P2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_X(x)\,dx=F_X(\infty)=1$.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется число $M[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\,p_X(x)\,dx$, если этот интеграл существует.

Медианой случайной величины X с распределением $F_X(x)$ называется такое значение аргумента m, для которого выполняются неравенства

$$F_X(m)\le\frac{1}{2}\le F_X(m+0);\quad M_e[X]=m.$$

Если функция распределения непрерывна, то существует по меньшей мере одно значение аргумента, для которого выполняется равенство

$$F_X(M_e[X])=\frac{1}{2}.$$

Квантилью порядка p случайной величины X с распределением $F_X(x)$ называется корень уравнения $F_X(x)=p$.

Модой распределения непрерывной случайной величины с плотностью $p_X(x)$ называют то значение аргумента, при котором плотность достигает максимума: $p_X(M_o[X])=\max\limits_x p_X(x)$.

Задачи с решениями

1. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x\le 2;\\ (x-2)^2, & \text{если}\quad 2<x\le 3;\\ 1, & \text{если}\quad x>3.\end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей случайной величины X.

б) Определить вероятность попадания величины X в интервал *(1;2,5)*.

Решение.

а) По определению плотность есть производная от функции распределения. Взяв производную от $F_X(x)$ на каждом участке ее существования, имеем:

$$p_X(x) = \begin{cases} 2x-4, & \text{если} \quad x \in [2,3]; \\ 0, & \text{если} \quad x \notin [2,3]. \end{cases}$$

б) Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал определяется на основе свойства функции распределения вероятностей: $P\{1 < X < 2{,}5\} = F_X(2{,}5) - F_X(1) = (2{,}5-2)^2 - 0 = 0{,}25$.

2. Случайная величина *X* имеет плотность распределения вероятностей

$$p_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0; \\ 0{,}5 \times \sin x & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi; \\ 0 & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

а) Найти функцию распределения вероятностей случайной величины *X*.

б) Вычислить вероятность того, что в результате двух испытаний величина *X* только один раз примет значение из интервала $(0, \pi/4)$.

<u>Решение</u>.

а) Функция распределения вероятностей есть интеграл от плотности распределения вида $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_X(t)dt$. Применим это определение для нашего случая, используя свойства определенного интеграла:

$$F_X(x) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt & \text{при} \quad x \le 0; \\ \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{x} (0{,}5)\sin t dt & \text{при} \quad 0 < x \le \pi; \\ \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{\pi} (0{,}5)\sin t dt + \int\limits_{\pi}^{x} 0dt & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Окончательно получаем

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ 0{,}5(1-\cos x) & \text{при} \quad 0 < x \le \pi; \\ 1 & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

б) Обозначим через A_i $(i = 1{,}2)$ – событие, состоящее в том, что в результате испытания величина *X* примет значение из интервала $(0, \pi/4)$. Вероятность этого события находится на основе свойств функции распределения вероятностей для непрерывной случайной величины:

$$P(A_i) = P\{0 < X < \pi/4\} = F_X(\pi/4) - F_X(0) = 0{,}5(1-\cos(\pi/4)) - 0 \approx 0{,}146.$$

Отсюда вероятность искомого события (обозначим его через *B*) будет

$$P(B) = P(A_1 \cap \overline{A_2} + \overline{A_1} \cap A_2) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2) \approx 0{,}146 \times (1-0{,}146) \times 2 \approx 0{,}249.$$

3. Плотность распределения вероятностей случайной величины *X* равна

$$p_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0; \\ 1/3 & \text{при} \quad 0 \le x \le 3; \\ 0 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

а) Построить функцию распределения вероятностей случайной величины X и начертить ее график.

б) Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение величины X.

Решение.

а) Выразив функцию распределения вероятностей через плотность распределения вероятностей, находим:

$$F_X(x) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt & \text{при} \quad x \le 0; \\ \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{x} \frac{1}{3} dt & \text{при} \quad 0 < x \le 3; \\ \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{3} \frac{1}{3} dt + \int\limits_{3}^{x} 0dt & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Окончательно имеем

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ x/3 & \text{при} \quad 0 < x \le 3; \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

График этой функции представлен на рис. 6.1.

б) Для определения математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения воспользуемся их определениями:

$$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{3} (x/3) dx + \int\limits_{3}^{\infty} 0dx = 1{,}5\,.$$

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = \int\limits_{0}^{3} (x^2/3) dx - (1{,}5)^2 = 0{,}75\,.$$

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} \approx 0{,}866\,.$$

4. Случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей

$$p_X(x) = \begin{cases} (2/\pi)\cos^2 x & \text{при} \quad |\mathrm{x}| \le \pi/2; \\ 0 & \text{при} \quad |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Найти: а) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X; б) вероятность попадания величины X в интервал $(-\sigma[X], \sigma[X])$.

Решение.

а) Согласно определений

$$M[X] = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x(2/\pi)\cos^2 x\, dx = \frac{2}{\pi}\left[x\left(\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8}\cos 2x \right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0\,;$$

$$D[X] = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2(2/\pi)\cos^2 x\, dx - 0 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{6} + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\right)\sin 2x + \frac{x}{4}\cos 2x \right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{4} \approx 1{,}431.$$

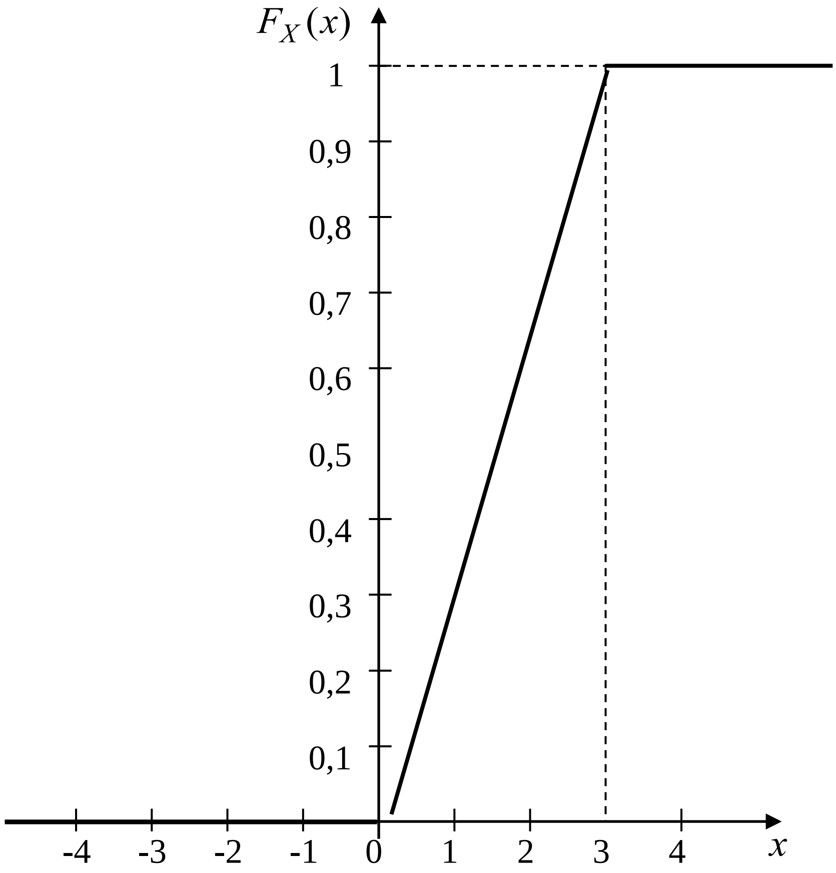


Рис. 6.1. Функция распределения вероятностей случайной величины *X*

б) Вычислим $\sigma[X] \approx 1{,}196$ и найдем

$$P\{-1{,}196 < X < 1{,}196\} = \int_{-1{,}196}^{1{,}196} (2/\pi)\cos^2 x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2}\right]\Bigg|_{-1{,}196}^{1{,}196} \approx 0{,}761.$$

5. Случайная величина *X* имеет плотность распределения вероятностей

$$p_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0; \\ 2e^{-2x} & \text{при} \quad x \ge 0. \end{cases}$$

а) Построить функцию распределения $F_X(x)$;

б) Найти вероятность того, что случайная величина *X* примет значение, меньшее, чем ее математическое ожидание.

Решение.

а) Пользуясь определением, найдем функцию распределения случайной величины *X*:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-2x} & \text{при} \quad x \ge 0. \end{cases}$$

б) Для нахождения вероятности $P\{X < M[X]\}$ воспользуемся определением функции распределения вероятностей, но прежде вычислим значение математического ожидания:

$$M[X]=2\int_0^{\infty} xe^{-2x}dx=2\left[-\frac{x}{2}e^{-2x}-\frac{e^{-2x}}{4}\right]\Bigg|_0^{\infty}=0{,}5;$$

$$P\{X<M[X]\}=F_X(M[X])=1-e^{-2\times 0{,}5}\approx 0{,}632.$$

6. Точка брошена наудачу внутрь круга радиуса *R*. Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади этой области. Найти функцию распределения и дисперсию расстояния от точки до центра круга.

<u>Решение</u>. Случайная величина X – это расстояние от брошенной точки до центра круга, т. е. $0<x<R$. По определению площади круга неравенство можно преобразовать к виду: $0<\pi x^2<\pi R^2$. Далее, используя определение функции распределения, имеем $F_X(x)=P\{X<x\}=\dfrac{\pi x^2}{\pi R^2}=\dfrac{x^2}{R^2}$. Отсюда окончательно получаем

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0; \\ \dfrac{x^2}{R^2} & \text{при} \quad 0<x<R; \\ 1 & \text{при} \quad x\ge R. \end{cases}$$

Для нахождения дисперсии необходимо найти плотность $p_X(x)=F'_X(x)$:

$$p_X(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{R^2} & \text{при} \quad 0<x<R; \\ 0 & \text{при} \quad 0\le x, \quad x\ge R. \end{cases}$$

$$D[X]=M[X^2]-(M[X])^2=\int_0^R x^2\frac{2x}{R^2}dx-\left(\int_0^R x\frac{2x}{R^2}dx\right)^2=\frac{R^2}{18}.$$

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение

$$P_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

Что больше: $P\{-0{,}5\le X\le -0{,}1\}$ или $P\{1\le X\le 2\}$?

<u>Решение</u>. Найдем соответствующие вероятности по таблице стандартного нормального распределения:

$$P\{-0{,}5\le X\le -0{,}1\}=\int_{-0{,}5}^{-0{,}1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}dx\approx 0{,}152.$$

$$P\{1\le X\le 2\}=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}dx\approx 0{,}136.$$

Следовательно, $P\{-0{,}5\le X\le -0{,}1\}>P\{1\le X\le 2\}$.

8. Случайная величина эксцентриситета детали имеет распределение Рэлея:

$$F_X(x)=\begin{cases} 1-e^{-x^2/2}, & x\ge 0; \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, медиану и моду эксцентриситета.

Решение. Плотность распределения найдем, воспользовавшись ее определением: $p_X(x) = F_X'(x) = xe^{-x^2/2}$, $x \ge 0$.

Медиана (или квантиль порядка *0,5*) есть такое значение *x* непрерывной случайной величины, при котором выполняется равенство $F_X(x) = 0{,}5$.

Преобразуя уравнение

$$1 - e^{-x^2/2} = 0{,}5;$$

$$\ln e^{-x^2/2} = \ln 0{,}5;$$

$$\frac{-x^2}{2} = -\ln 2,$$

находим решение: $Me[X] = \sqrt{2\ln 2}$ есть значение медианы случайной величины *X* эксцентриситета детали.

Если случайная величина *X* абсолютно непрерывна, то значения *x*, в которых плотность достигает своего максимального значения, называются модами. Для нахождения моды заданного распределения запишем уравнение $p_X'(x) = 0$. Уравнение $e^{-x^2/2} - x^2e^{-x^2/2} = 0$ имеет два решения: $x_1 = -1, x_2 = 1$. По условию случайная величина принимает только неотрицательные значения. Следовательно, $Mo[X] = 1$.

9. Дана плотность распределения вероятностей случайной величины *X*:

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0; \\ (3/2)x^2, & \text{если} \quad 0 \le x \le 1; \\ (3/2)(2-x)^2, & \text{если} \quad 1 < x \le 2; \\ 0, & \text{если} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найти: а) начальные и центральные моменты первых четырех порядков; б) коэффициенты асимметрии и эксцесса этой случайной величины.

Решение.

а) Для нахождения начальных и центральных моментов воспользуемся их определениями (см. задачу 4, раздел 5):

$$\alpha_1[X] = M[X] = \int_{-\infty}^{0} x0dx + \int_0^1 x(3/2)x^2dx + \int_1^2 x(3/2)(2-x)^2dx + \int_2^{\infty} x0dx = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1;$$

$$\alpha_2[X] = M[X^2] = \int_0^1 x^2(3/2)x^2dx + \int_1^2 x^2(3/2)(2-x)^2dx = 0{,}3 + 0{,}8 = 1{,}1;$$

$$\alpha_3[X] = M[X^3] = \int_0^1 x^3(3/2)x^2dx + \int_1^2 x^3(3/2)(2-x)^2dx = 0{,}25 + 1{,}05 = 1{,}3;$$

$$\alpha_4[X] = M[X^4] = \int_0^1 x^4(3/2)x^2dx + \int_1^2 x^4(3/2)(2-x)^2dx \approx 0{,}21 + 1{,}41 = 1{,}62;$$

$$\mu_1[X] = 0;$$

$$\mu_2[X] = \alpha_2[X] - (\alpha_1[X])^2 = 1{,}1 - 1^2 = 0{,}1;$$

$$\mu_3[X] = \alpha_3[X] - 3\alpha_2[X] \times \alpha_1[X] + 3\alpha_1[X] \times (\alpha_1[X])^2 - (\alpha_1[X])^3 =$$
$$= 1{,}3 - 3 \times 1{,}1 \times 1 + 3 \times 1 \times 1^2 - 1^3 = 0;$$

$$\mu_4[X] = \alpha_4[X] - 4\alpha_3[X]\alpha_1[X] + 6\alpha_2[X](\alpha_1[X])^2 - 3(\alpha_1[X])^4 =$$
$$= 1{,}62 - 4\times 1{,}3\times 1 + 6\times 1{,}1\times 1^2 - 3\times 1^4 = 0{,}02.$$

б) Коэффициенты асимметрии и эксцесса вычисляются по следующим формулам:

$$A_s[X] = \frac{\mu_3[X]}{\sqrt{(\mu_2[X])^3}} = \frac{0}{\sqrt{0{,}1^3}} = 0;$$

$$E_k[X] = \frac{\mu_4[X]}{(\mu_2[X])^2} - 3 = \frac{0{,}02}{0{,}1^2} - 3 = -1.$$

10. Плотность распределения вероятностей случайной величины *X* имеет вид

$$p_X(x) = \begin{cases} Ax^2 e^{-\lambda x}, & x \ge 0,\ \lambda > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

а) Вычислить коэффициент *A*.

б) Найти функцию распределения вероятностей величины *X*.

в) Определить вероятность попадания величины *X* в интервал $(0{,}1/\lambda)$.

Решение.

а) Коэффициент *A* находим из условия нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = 1$. Перепишем это уравнение применительно к нашему случаю: $\int\limits_{0}^{\infty} Ax^2 e^{-\lambda x}dx = 1$. Проинтегрировав по частям дважды и подставив пределы, получаем уравнение $\frac{2}{\lambda^3} = \frac{1}{A}$. Отсюда имеем $A = 0{,}5\lambda^3$.

б) Так как задана плотность распределения, функцию распределения вероятностей случайной величины *X* найдем как интеграл от плотности:

$$F_X(x) = \int\limits_0^x 0{,}5t^2 e^{-\lambda t}dt = 1 - \frac{\lambda^2 x^2 + 2\lambda x + 2}{2} e^{-\lambda x}.$$

в) Вероятность попадания в интервал определяется как интеграл от плотности в заданных пределах, т. е.

$$P\left\{0 < X < \frac{1}{\lambda}\right\} = \int\limits_0^{1/\lambda} 0{,}5t^2 e^{-\lambda t}dt = 1 - \frac{5}{2e} \approx 0{,}08.$$

Задачи для самостоятельной работы

6.1. Случайная величина *X* задана плотностью распределения вероятностей:

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x^4}, & x \ge 1; \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию величины *X*.

6.2. Случайная величина X задана на всей оси функцией распределения вероятностей: $F_X(x) = \frac{1}{2} + (arctg(x)/\pi)$.

а) Определить вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала $(0,1)$.

б) Найти плотность распределения вероятностей величины X.

в) Вычислить моду величины X.

6.3. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ 1/2 + (1/\pi)\arcsin(x/2), & -2 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей случайной величины X.

б) Определить вероятность того, что в результате трех независимых испытаний величина X попадет в интервал $(0,1)$ не менее двух раз.

в) Вычислить математическое ожидание и дисперсию величины X.

6.4. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x^2, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

а) Найти плотность распределения вероятностей случайной величины X и построить ее график.

б) Определить вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний величина X ровно три раза примет значение из интервала $(0{,}25, 0{,}75)$.

в) Вычислить медиану величины X.

6.5. При каком значении a функция $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$, $-\infty < x < \infty$ является плотностью распределения вероятностей случайной величины X?

6.6. Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/(2b), & |x-a| \le b, \\ 0, & |x-a| > b. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию величины X.

6.7. Вероятность обнаружения затонувшего судна за время поиска X задается формулой

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \quad \lambda > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Определить среднее время поиска, необходимое для обнаружения судна.

6.8. Функция распределения вероятностей случайной величины X имеет вид

$$F_X(x)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{a}{x}\right)^3, & x\ge a,\\ 0, & x<a, \quad a>0.\end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию величины *X*.

6.9. Случайная величина *X* распределена по закону

$$p_X(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0, x>1,\\ 2x, & \text{если} \quad 0\le x\le 1.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание, моду и медиану величины *X*.

6.10. Функция распределения

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x^2/\alpha}, & x\ge 0, \quad \alpha>0,\\ 0, & x<0\end{cases}$$

в ряде случаев характеризует срок службы элементов электронной аппаратуры. Найти плотность распределения $p_X(x)$ и вычислить моду величины *X*.

6.11. Случайная величина *X* задана функцией распределения вероятностей $F_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-z^2/2}dz$. Найти плотность распределения вероятностей величины *X* и вероятность попадания *X* в интервал $(-\infty,0)$.

6.12. Плотность распределения случайной величины *Z* имеет вид

$$p_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{z^2}, & z\ge 1,\\ 0, & z<1.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию величины *X*, если $X=1/Z$.

6.13. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины *X* (времени безотказной работы некоторого устройства) имеет вид

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x/T}, & x\ge 0, \quad T\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Найти вероятность безотказной работы устройства за время *T*.

6.14. Случайная величина *X* задана плотностью распределения вероятностей

$$p_X(x)=\begin{cases}(1/2)x, & x\in[0,2];\\ 0, & x\notin[0,2].\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию величины *X*.

6.15. Случайная величина *X* задана плотностью распределения вероятностей

$$p_X(x)=\begin{cases}x+0{,}5, & x\in[0,1];\\ 0, & x\notin[0,1].\end{cases}$$

Найти математическое ожидание величины $Y=X^3$.

6.16. Случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей

$$p_X(x) = \begin{cases} -(3/4)x^2 + (9/2)x - 6, & x \in [2,4]; \\ 0, & x \notin [2,4]. \end{cases}$$

Найти моду и медиану, коэффициенты асимметрии и эксцесса величины X.

6.17. Случайная величина X распределена равномерно с $M[X]=4$ и $D[X]=3$. Найти плотность распределения вероятностей величины X.

6.18. Найти медиану и моду распределения вероятностей, плотность которого задается формулой $p_X(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

6.19. Случайная величина X имеет показательное распределение, заданное плотностью

$$p_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти коэффициенты асимметрии и эксцесса величины X.

6.20. Найти квантиль порядка *0,5* для случайной величины, имеющей в интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ плотность распределения вероятностей

$$p_X(x) = \frac{2}{\pi}\cos^2 x.$$

6.21. Случайная величина X подчиняется бета-распределению с плотностью $p_X(x) = \dfrac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}, \quad 0<x<1, \quad p>0, \quad q>0$. Найти начальные моменты трех первых порядков величины X.

6.22. Случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей $p_X(x) = A \times (1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}$, где n – целое положительное число, большее *1*. Определить постоянную A, математическое ожидание и дисперсию величины X.

6.23. Случайная величина X имеет распределение Парето, заданное функцией распределения вероятностей $F_X(x) = 1 - \left(\dfrac{\beta}{x}\right)^{\alpha}, \quad x > \beta, \quad \alpha > 0$. Найти медиану и квантиль порядка *0,5* величины X.

6.24. Плотность распределения вероятностей случайных амплитуд X боковой качки корабля определяется формулой

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где σ^2 – дисперсия угла крена. Одинаково ли часто встречаются амплитуды, меньшие и большие средней?

6.25. Случайная величина X имеет треугольное распределение (распределение Симпсона):

$$p_X(x) = \begin{cases} 0{,}5 - 0{,}25|2 - x| & \text{при} \quad x \in [0{,}4]; \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [0{,}4]. \end{cases}$$

Вычислить моду, медиану, математическое ожидание, дисперсию, коэффициенты асимметрии и эксцесса величины X.

6.26. Пусть в качестве функции распределения вероятностей некоторой случайной величины используется кривая Кантора. Выяснить, является ли эта функция непрерывной и дифференцируемой.

7. МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Основные понятия раздела

Системы случайных величин будем обозначать прописными буквами греческого алфавита, а их элементы – прописными буквами латинского алфавита: $\xi = (X_1, ..., X_n)$, $\eta = (Y_1, ..., Y_k)$, …

Пусть дан вектор СВ $\xi = (X_1, ..., X_n)$ и вектор действительных чисел $(x_1, ..., x_n)$. Функцию $F_\xi(x_1, ..., x_n) = P\{X_1 < x_1, ..., X_n < x_n\}$ называют *n-мерной функцией распределения* СВ $\xi = (X_1, ..., X_n)$.

<u>Свойства функции распределения многомерной случайной величины</u>.

FF1. Функция распределения вероятностей многомерной случайной величины – неубывающая функция своих аргументов.

FF2. Функция $F_\xi(x_1, ..., x_n)$ является ограниченной ($0 \le F_\xi(x_1, ..., x_n) \le 1$):

– $F_\xi(x_1, ..., x_n) = 0$, если хотя бы один ее аргумент $x_i = -\infty$ $(i = \overline{1, n})$;

– $F_\xi(x_1, ..., x_n) = 1$, если все ее аргументы $x_i = \infty$ $(i = \overline{1, n})$.

FF3. Функция $F_\xi(x_1, ..., x_n)$ непрерывна слева по каждому аргументу.

FF4. Если известна функция распределения вероятностей системы случайных величин $\xi = (X_1, ..., X_n)$, то может быть найдена функция распределения любой ее подсистемы: $F_\xi(x_1, ..., x_{i-1}, \infty, x_{i+1}, ..., x_n) = F_\varsigma(x_1, ... x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$, где $\varsigma = (X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_n)$.

Если существует такая функция $p_\xi(t_1, ..., t_n)$, что при любых $x_1, ..., x_n$ имеет место равенство

$$F_\xi(x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} p_\xi(t_1, ..., t_n) dt_1 ... dt_n,$$

то эта функция называется *плотностью распределения* вероятностей системы случайных величин ξ. При этом почти всюду имеет место равенство

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1 ... \partial x_n} F_\xi(x_1, ..., x_n) = p_\xi(x_1, ..., x_n).$$

Математическое ожидание вида $\gamma_{k_1, ..., k_n}[\xi, C] = M\left[(X_1 - C_1)^{k_1} ... (X_n - C_n)^{k_n}\right]$ называется *n-мерным моментом* $(k_1 + ... + k_n)$*-го порядка* случайного вектора $\xi = (X_1, ..., X_n)$ относительно вектора констант $C = (C_1, ..., C_n)$.

При $C_i = M[X_i]$ $(i = \overline{1, n})$ момент $\gamma_{k_1, ..., k_n}[\xi, C]$ называют *центральным* и обозначают так: $\mu_{k_1, ..., k_n}[\xi] = M\left[(X_1 - M[X_1])^{k_1} ... (X_n - M[X_n])^{k_n}\right]$.

При $C_i = 0$ $(i = \overline{1, n})$ момент $\gamma_{k_1, ..., k_n}[\xi, C]$ называют *начальным* и обозначают $\alpha_{k_1, ..., k_n}[\xi] = M\left[X_1^{k_1} ... X_n^{k_n}\right]$.

Характеристика случайных величин *X* и *Y*, вычисляемая по формуле

$$R[X,Y]=\begin{cases}\sum_i\sum_j (x_i-M[X])(y_j-M[Y])\rho_\xi(x_i,y_j);\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M[X])(y-M[Y])\,p_\xi(x,y)\,dx\,dy.\end{cases}$$

называется *корреляционным моментом* (моментом связи этих случайных величин). Корреляционный момент есть характеристика системы случайных величин, описывающая, помимо рассеивания величин X и Y относительно математических ожиданий, еще и связь между ними.

Для улавливания степени связи X и Y в «чистом виде» переходят от корреляционного момента $R[X,Y]$ к безразмерной характеристике (коэффициенту корреляции): $r[X,Y]=\dfrac{R[X,Y]}{\sigma[X]\cdot\sigma[Y]}$, где $\sigma^2[X]=D[X]$, $\sigma^2[Y]=D[Y]$.

В общем случае n-мерная случайная величина $\xi=(X_1,...,X_n)$ может быть охарактеризована при помощи:

1) математических ожиданий: $M[X_1], ..., M[X_n]$;

2) дисперсий: $D[X_1], ..., D[X_n]$;

3) корреляционных моментов $R_{ij}\equiv R[X_i,X_j]$; $i,j=\overline{1,n}$, которые можно свести в корреляционную матрицу

$$\|R_{ij}\|=\begin{pmatrix}R_{11} & R_{12} & ... & R_{1n}\\ R_{21} & R_{22} & ... & R_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ R_{n1} & R_{n2} & ... & R_{nn}\end{pmatrix},$$

где $R_{ii}=D[X_i]$; $i=\overline{1,n}$, или в матрицу коэффициентов корреляции

$\|r_{ij}\|\equiv\|r[X_i,X_j]\|$;

4) начальных и центральных моментов более высоких порядков;

5) абсолютных начальных и центральных моментов любого порядка.

Задачи с решениями

1. Двумерная случайная величина $\xi=(X,Y)$ имеет плотность распределения вероятностей $p_\xi(x,y)=\dfrac{A}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$. Найти величину A, функцию распределения $F_\xi(x,y)$, вероятность попадания случайной точки (X,Y) в квадрат, заданный прямыми $x=0,\ y=0,\ x=1,\ y=1$.

<u>Решение</u>. Для определения величины A используем свойство плотности, называемое условием нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_\xi(x,y)dxdy$. Применив это условие для нашего случая, запишем уравнение:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{A}{\pi^2(1-x^2)(1-y^2)}dxdy=1.$$

Проинтегрировав и подставив пределы, получаем: $A=1$.

Функцию распределения вероятностей найдем по определению

$$F_\xi(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x}p_\xi(t,z)dtdz\,.$$

$$F_\xi(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi^2(1+t^2)(1+z^2)}dtdz=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}y+\frac{1}{2}\right).$$

Вероятность попадания случайной точки в заданный квадрат вычислим, используя свойство плотности распределения вероятностей:

$$P\{0<x<1,\,0<y<1\}=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}dxdy=\frac{1}{16}=0{,}0625\,.$$

2. Распределение вероятностей случайной величины $\xi=(X,Y)$ задано таблицей:

Y \ X	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,3	0,11	0,21

Найти законы распределения составляющих и корреляционный момент $R[X,Y]$.

<u>Решение</u>. Для нахождения законов распределения составляющих воспользуемся следующим свойством:

$$P\{X=x\}=\sum_y P\{X=x,Y=y\}\ \text{ и }\ P\{Y=y\}=\sum_x P\{X=x,Y=y\}.$$

$$P\{X=26\}=\sum_{j=1}^{2}P\{X=26,Y=y_j\}=0{,}05+0{,}09=0{,}14;$$

$$P\{X=30\}=\sum_{j=1}^{2}P\{X=30,Y=y_j\}=0{,}12+0{,}3=0{,}42;$$

$$P\{X=41\}=\sum_{j=1}^{2}P\{X=41,Y=y_j\}=0{,}08+0{,}11=0{,}19;$$

$$P\{X=50\}=\sum_{j=1}^{2}P\{X=50,Y=y_j\}=0{,}04+0{,}21=0{,}25;$$

$$P\{Y=2{,}3\}=\sum_{i=1}^{4}P\{X=x_i,Y=2{,}3\}=0{,}05+0{,}12+0{,}08+0{,}04=0{,}29;$$

$$P\{Y=2{,}7\}=\sum_{i=1}^{4}P\{X=x_i,Y=2{,}7\}=0{,}09+0{,}3+0{,}11+0{,}21=0{,}71.$$

Проверим условие нормировки:

$$\sum_{i=1}^{4}P\{X=x_i\}=0{,}14+0{,}42+0{,}19+0{,}25=1;$$

$$\sum_{j=1}^{2}P\{Y=y_i\}=0{,}29+0{,}71=1.$$

По определению

$$R[X,Y]=M[(X-M[X])(Y-M[Y])]=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2}(x_i-M[X])(y_j-M[Y])\times p_{ij}\,.$$

$$M[X]=26\times 0{,}14+30\times 0{,}42+41\times 0{,}19+50\times 0{,}25=36{,}53;$$

$$M[Y]=2{,}3\times 0{,}29+2{,}7\times 0{,}71=2{,}584;$$

$$\begin{aligned}R[X,Y]&=(26-36{,}53)(2{,}3-2{,}584)\times 0{,}05+(26-36{,}53)(2{,}7-2{,}584)\times 0{,}09+\\&+(30-36{,}53)(2{,}3-2{,}584)\times 0{,}12+(30-36{,}53)(2{,}7-2{,}584)\times 0{,}30+\\&+(41-36{,}53)(2{,}3-2{,}584)\times 0{,}08+(41-36{,}53)(2{,}7-2{,}584)\times 0{,}11+\\&+(50-36{,}53)(2{,}3-2{,}584)\times 0{,}04+(50-36{,}53)(2{,}7-2{,}584)\times 0{,}21\approx 0{,}17.\end{aligned}$$

3. Найти плотность распределения и вероятность попадания случайной точки $\xi=(X,Y)$ в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=1, x=2, y=3, y=5$, если известна функция распределения:

$$F_\xi(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & \text{если} \quad x>0,\ y>0;\\ 0, & \text{в противномслучае.}\end{cases}$$

Решение. По определению $p_\xi(x,y)=\dfrac{\partial F_\xi(x,y)}{\partial x\partial y}$.

$$p_\xi(x,y)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2+2^{-y}\ln 2+2^{-x-y}(\ln 2)^2, & \text{если} \quad x\ge 0,\ y\ge 0;\\ 0, & \text{в противномслучае.}\end{cases}$$

Для определения требуемой вероятности воспользуемся свойством функции распределения для абсолютно непрерывных случайных величин:

$$P\{a<X<b, c<Y<d\}=F_\xi(b,d)-F_\xi(b,c)-F_\xi(a,d)+F_\xi(a,c).$$

Подставляя значения границ интервалов, имеем:

$$P\{1<X<2, 3<Y<5\}=(1-2^{-2}-2^{-5}+2^{-2-5})-(1-2^{-2}-2^{-3}+2^{-2-3})-$$
$$-(1-2^{-1}-2^{-5}+2^{-1-5})+(1-2^{-1}-2^{-3}+2^{-1-3})\approx 0{,}023.$$

4. Положительная двумерная случайная величина $\xi=(X,Y)$ задана функцией распределения вероятностей

$$F_\xi(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-\alpha x})(1-e^{-\beta y}), & x,y\ge 0, \quad \alpha,\beta>0;\\ 0, & x,y<0.\end{cases}$$

Найти плотности распределения составляющих $p_X(x)$, $p_Y(y)$ и начальные моменты $\alpha_1[X]$, $\alpha_1[Y]$, $\alpha_{1,1}[X,Y]$.

Решение. Воспользовавшись определением для нахождения плотности распределения величины ξ, получим:

$$p_\xi(x,y)=\alpha\beta e^{-\alpha x}e^{-\beta y}, \quad x,y\ge 0.$$

Для вычисления плотностей распределения составляющих применим следующее свойство: $p_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_\xi(x,y)dy$; $p_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_\xi(x,y)dx$. В нашем случае имеем

$$p_X(x)=\int\limits_0^{\infty}\alpha\beta e^{-\alpha x}e^{-\beta y}dy=\alpha e^{-\alpha x}, \quad x\ge 0;$$

$$p_Y(y)=\int_0^{\infty}\alpha\beta e^{-\alpha x}e^{-\beta y}dx=\beta e^{-\beta y},\quad y\ge 0\,.$$

Начальные моменты $\alpha_1[X]$, $\alpha_1[Y]$ и $\alpha_{1,1}[X,Y]$ найдем по определению

$$\alpha_1[X]=M[X]=\int_0^{\infty}x\alpha e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}\,;\ \alpha_1[Y]=M[Y]=\int_0^{\infty}y\beta e^{-\beta y}dy=\frac{1}{\beta}\,;$$

$$\alpha_{1,1}[X,Y]=M[XY]=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}xy\alpha\beta e^{-\alpha x}e^{-\beta y}dxdy=\frac{1}{\alpha\beta}\,.$$

5. Распределение вероятностей случайной величины $\xi=(X,Y)$ задано таблицей:

$Y \backslash X$	–1	0	1
0	0,10	0,15	0,20
1	0,15	0,25	0,15

Найти вероятность того, что X примет значение, большее *0*, и центральные моменты $\mu_{0,2}[\xi]$, $\mu_{2,0}[\xi]$ и $\mu_{1,1}[\xi]$.

Решение. Прежде чем отыскать требуемую вероятность, запишем распределение вероятностей случайной величины X:

X	–1	0	1
P	0,25	0,40	0,35

Тогда $P\{X>0\}=1-P\{X\le 0\}=1-(P\{X=-1\}+P\{X=0\})=0{,}35$.

Центральные моменты вычислим по определению

$\mu_{k,l}[\xi]=M[(X-M[X])^k(Y-M[Y])^l]$.

Запишем распределение случайной величины Y:

Y	0	1
P	0,45	0,55

Найдем $M[X]$ и $M[Y]$:

$$M[X]=\sum_{j=1}^{3}x_jP\{X=x_j\}=-1\times 0{,}25+0\times 0{,}40+1\times 0{,}35=0{,}1;$$

$$M[Y]=\sum_{i=1}^{2}y_iP\{Y=y_i\}=0\times 0{,}45+1\times 0{,}55=0{,}55\,.$$

Далее находим

$$\mu_{0,2}[\xi]=M[(X-M[X])^0(Y-M[Y])^2]=D[Y]=\sum_{i=1}^{2}(y_i-M[Y])^2P\{Y=y_i\}=$$

$$=(0-0{,}55)^2\times 0{,}45+(1-0{,}55)^2\times 0{,}55\approx 0{,}247;$$

$$\mu_{2,0}[\xi] = M[(X - M[X])^2 (Y - M[Y])^0] = D[X] = \sum_{j=1}^{3} (x_j - M[X])^2 P\{X = x_j\} =$$

$$= (-1 - 0{,}1)^2 \times 0{,}25 + (0 - 0{,}1)^2 \times 0{,}4 + (1 - 0{,}1)^2 \times 0{,}35 = 0{,}59;$$

$$\mu_{1,1}[\xi] = M[(X - M[X])^1 (Y - M[Y])^1] = R[X,Y] =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} (y_i - M[Y])(x_j - M[X]) P\{X = x_j, Y = y_i\} = (0 - 0{,}55)(-1 - 0{,}1)0{,}1 +$$

$$= (0 - 0{,}55)(0 - 0{,}1)0{,}15 + (0 - 0{,}55)(1 - 0{,}1)0{,}2 + +(1 - 0{,}55)(-1 - 0{,}1)0{,}15 +$$

$$+ (1 - 0{,}55)(0 - 0{,}1)0{,}25 + (1 - 0{,}55)(1 - 0{,}1)0{,}15 \approx 0{,}019.$$

6. Случайная величина $\xi = (X,Y)$ задана плотностью распределения вероятностей

$$p_\xi(x,y) = \begin{cases} 0{,}5\sin(x+y), & 0 \le x \le \pi/2, \quad 0 \le y \le \pi/2; \\ 0, & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Определить: а) функцию распределения системы; б) математические ожидания $M[X]$ и $M[Y]$; в) построить матрицу коэффициентов корреляции.

Решение.

а) Функцию распределения найдем по определению, применив его для нашего случая:

$$F_\xi(x,y) = \int_0^y \int_0^x 0{,}5\sin(t+z)\,dtdz = 0{,}5(\sin x + \sin y - \sin(x+y)).$$

б) Математическое ожидание случайной величины X:

$$M[X] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0{,}5x\sin(x+y)\,dxdy = 0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos x\right]dx = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785.$$

В силу симметрии плотности распределения вероятностей относительно X и Y следует, что $M[X] = M[Y] \approx 0{,}785$.

в) Коэффициент корреляции находится по формуле

$$r[X,Y] = \frac{R[X,Y]}{\sqrt{D[X] \times D[Y]}}.$$

Вычислим дисперсию случайной величины X:

$$D[X] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0{,}5x^2 \sin(x+y)\,dxdy - \frac{\pi^2}{16} = 0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos x\right]dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2 \approx 0{,}188.$$

В силу симметрии плотности распределения вероятностей относительно X и Y имеем $D[X] = D[Y] = 0{,}188$.

Корреляционный момент

$$R[X,Y] = M\big[(X - M[X])(Y - M[Y])\big] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])(y - M[Y])\, p_\xi(x,y)\,dxdy.$$

В нашем случае получаем

$$R[X,Y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}0{,}5xy\sin(x+y)dxdy-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin x-\frac{\pi}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]dx-\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi}{2}-1-\frac{\pi^2}{16}\approx-0{,}046.$$

Таким образом, матрица коэффициентов корреляции имеет вид

$$\| r \| = \begin{vmatrix} r[X,X] & r[X,Y] \\ r[Y,X] & r[Y,Y] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -0{,}245 \\ -0{,}245 & 1 \end{vmatrix}.$$

7. Определить плотность распределения вероятностей и начальный момент третьего порядка $\alpha_{1,1,1}[\xi]$ системы случайных величин $\xi=(X,Y,Z)$, заданных функцией распределения $F_\xi(x,y,z)=0{,}125xyz$ при $0<x,y,z<2$.

Решение. По определению $p_\xi(x,y,z)=\dfrac{\partial F_\xi(x,y,z)}{\partial x\partial y\partial z}$. Тогда для нашего случая имеем

$$p_\xi(x,y,z)=\begin{cases}0{,}125 & \text{при} \quad 0<x,y,z<2,\\ 0, & \text{в оставшихся случаях}.\end{cases}$$

Начальный момент третьего порядка вычислим по формуле

$$\alpha_{1,1,1}[\xi]=M[XYZ]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyzp_\xi(x,y,z)dxdydz=\int_0^2\int_0^2\int_0^2 xyz0{,}125dxdydz=1.$$

8. Даны математические ожидания двух нормальных случайных величин $M[X]=26$, $M[Y]=-12$ и матрица корреляционных моментов

$$\| R \| = \begin{vmatrix} 196 & -91 \\ -91 & 169 \end{vmatrix}.$$

Определить плотность распределения вероятностей системы $\xi=(X,Y)$.

Решение. Известно, что $R[X,Y]=M[(X-M[X])(Y-M[Y])]$. Отсюда получаем

$R[X,X]=M[(X-M[X])^2]=D[X]=196$;

$R[Y,Y]=M[(Y-M[Y])^2]=D[Y]=169$;

$R[X,Y]=R[Y,X]=M[(X-M[X])(Y-M[Y])]=-91.$

Определим коэффициент корреляции $r[X,Y]=\dfrac{-91}{\sqrt{196}\sqrt{169}}$. Запишем плотность распределения системы, используя формулу двумерного нормального распределения

$$p_\xi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma[X]\sigma[Y]\sqrt{1-r^2}}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{\dfrac{(x-M[X])^2}{D[X]}+\dfrac{(y-M[Y])^2}{D[Y]}+2r\dfrac{(x-M[X])(y-M[Y])}{\sigma[X]\sigma[Y]}}{2\left(1-r^2\right)}\right\}$$

и подставляя в нее найденные значения параметров:

$$p_\xi(x,y)=\frac{1}{182\pi\sqrt{3}}\times\exp\left\{-\frac{2}{3}\left(\frac{(x-26)^2}{196}+\frac{(y+12)^2}{196}+\frac{(x-26)(y+12)}{182}\right)\right\}.$$

9. Двумерная случайная величина $\xi=(X,Y)$ подчинена закону распределения с плотностью $p_\xi(x,y)=Axy$ в области D и $p_\xi(x,y)=0$ вне этой области. Область D – треугольник, ограниченный прямыми $x+y-1=0$, $x=0, y=0$. Найти величину A и вероятность того, что $X\in(0{,}0{,}5)$.

Решение. Величину A найдем по свойству плотности (условие нормировки), применив его к условию задачи:

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-x}Axy\,dx\,dy=1.$$

Решив это уравнение, получаем: $A=24$.

Для определения необходимой вероятности прежде найдем распределение величины X:

$$p_X(x)=\int\limits_0^{1-x}24xydy=6x^2-8x^3+3x^4,\quad x\subset(0{,}1);$$

$$P\{0<X<0{,}5\}=\int\limits_0^{0{,}5}(6x^2-8x^3+3x^4)dx=0{,}6875.$$

10. Пусть X и Y – случайные величины, имеющие конечные моменты второго порядка. Показать, что $D[X+Y]=D[X]+D[Y]$ тогда и только тогда, когда эти величины некоррелированы.

Решение. По определению $D[X+Y]=M\left[((X+Y)-M[X+Y])^2\right]$. Преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned}D[X+Y]&=M\left[(X+Y)^2-2(X+Y)M[X+Y]+(M[X+Y])^2\right]=\\&=M\left[X^2+2XY+Y^2-2XM[X+Y]-2YM[X+Y]+(M[X]+M[Y])^2\right]=\\&=M[X^2+2XY+Y^2-2XM[X]-2XM[Y]-2YM[X]-2YM[Y]+\\&\qquad+(M[X])^2+2M[X]M[Y]+(M[Y])^2]=\\&=M[\left(X^2-2XM[X]+(M[X])^2\right)+\left(Y^2-2YM[Y]+(M[Y])^2\right)+\\&\qquad+2\left(XY-XM[Y]-YM[X]+M[X]M[Y]\right)]=\\&=M\left[(X-M[X])^2+(Y-M[Y])^2+2(X-M[X])(Y-M[Y])\right]=\\&=M\left[(X-M[X])^2\right]+M\left[(Y-M[Y])^2\right]+2M[(X-M[X])(Y-M[Y])]=\\&=D[X]+D[Y]+2R[X,Y].\end{aligned}$$

Отсюда видно, что $D[X+Y]=D[X]+D[Y]$ тогда и только тогда, когда $R[X,Y]=0$, т. е. когда случайные величины X и Y некоррелированы. Что и требовалось показать.

Задачи для самостоятельной работы

7.1. Определить плотность распределения вероятностей системы трех случайных величин $\xi=(X,Y,Z)$ по заданной функции распределения:

$$F_\xi(x,y,z)=(1-e^{-ax})(1-e^{-by})(1-e^{-cz});\ x>0,\ y>0,\ z>0.$$

7.2. Определить вероятность попадания точки с координатами (X,Y) в область, заданную неравенствами $(1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2)$, если функция распределения системы $\xi = (X,Y)$ имеет вид $(a > 0)$

$$F_{\xi}(x,y) = \begin{cases} 1 - a^{-x^2} - a^{-2y^2} + a^{-x^2-2y^2}, & x > 0,\ y > 0; \\ 0, & x \le 0 \text{ или } y \le 0. \end{cases}$$

7.3. Координаты случайной точки (X,Y) распределены равномерно внутри прямоугольника, ограниченного абсциссами $(0,a)$ и ординатами $(0,b)$. Определить вероятность попадания случайной точки в круг радиуса R, если $a > b,\ 0 \le R \le b$, а центр круга совпадает с началом координат.

7.4. Дискретная случайная величина $\xi = (X,Y)$ задана таблицей:

Y \ X	0	1
–1	0,10	0,20
0	0,20	0,30
1	0,20	0

Найти законы распределения составляющих и центральные моменты двух первых порядков величины ξ.

7.5. Найти начальные моменты двух первых порядков случайной величины $\xi = (X,Y)$, заданной таблицей:

Y \ X	0	1
–1	0,10	0,15
0	0,15	0,25
1	0,20	0,15

7.6. Задана плотность совместного распределения двумерной случайной величины $\xi = (X,Y)$

$$p_{\xi}(x,y) = \begin{cases} 36xye^{-3(x^2+y^2)}, & x > 0,\ y > 0; \\ 0, & x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Найти математические ожидания и дисперсии составляющих.

7.7. Случайная величина X есть сумма трех случайных величин: $X = Y + Z + V$, $M[Y] = 1$, $M[Z] = 2$, $M[V] = 0$, $D[Y] = 0{,}01$, $D[Z] = 4$, $D[V] = 0{,}36$; $r_{12} = 0{,}2$; $r_{13} = 0{,}3$; $r_{23} = -0{,}1$. Найти $M[X]$ и $D[X]$.

7.8. Совместное распределение величин X и Y задано таблицей:

Y \ X	–1	0	1
–1	1/8	1/12	7/24
1	7/24	1/12	1/8

Найти: а) одномерные распределения величин X и Y; б) математические ожидания и дисперсии величин X и Y.

7.9. Совместное распределение величин X и Y является равномерным в единичном круге $x^2+y^2\le 1$. Найти вероятность $P\{|x|\le 3/4,\ |y|\le 3/4\}$.

7.10. Система случайных величин $\xi=(X,Y)$ задана таблицей:

Y \ X	0	1	2	3	4	5	6
0	0,202	0,174	0,113	0,062	0,049	0,023	0,004
1	0	0,099	0,064	0,040	0,031	0,020	0,006
2	0	0	0,031	0,025	0,018	0,013	0,008
3	0	0	0	0,001	0,002	0,004	0,011

а) Найти функцию распределения системы $\xi=(X,Y)$.

б) Определить вероятность $P\{Y\ge 2\}$.

в) Найти $M[X]$ и $M[Y]$.

7.11. Плотность распределения вероятностей системы случайных величин $\xi=(X,Y)$ имеет вид

$$p_\xi(x,y)=\begin{cases} c\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right) & \text{при} \quad x^2+y^2\le R^2, \\ 0 & \text{при} \quad x^2+y^2>R^2. \end{cases}$$

Определить постоянную c и вероятность попадания в круг радиуса $a<R$ с центром в начале координат.

7.12. Система случайных величин $\xi=(X,Y)$ в интервалах $(0\le X\le \pi/2)$ и $(0\le Y\le \pi/2)$ задана функцией распределения вероятностей

$$F_\xi(x,y)=(\sin x)(\sin y).$$

Найти: а) плотность распределения системы $\xi=(X,Y)$; б) математические ожидания величин X и Y; в) корреляционную матрицу системы.

7.13. Распределение вероятностей дискретной случайной величины $\xi=(X,Y)$ задано таблицей:

Y \ X	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти законы распределения составляющих и корреляционную матрицу системы.

7.14. Доказать, что коэффициент корреляции по абсолютной величине не превосходит единицы.

7.15. Дана матрица корреляционных моментов системы трех случайных величин $\xi=(X,Y,Z)$:

$$\| R \| = \begin{vmatrix} 16 & -14 & 12 \\ -14 & 49 & -21 \\ 12 & -21 & 36 \end{vmatrix}.$$

Составить матрицу коэффициентов корреляции системы ξ.

7.16. Определить математические ожидания и корреляционную матрицу системы случайных величин $\xi = (X, Y)$, заданной плотностью распределения вероятностей $p_\xi(x, y) = \dfrac{2}{\pi(x^2 + y^2 + 1)^3}$.

7.17. Плотность распределения координат случайной точки на плоскости имеет вид $p_\xi(x, y) = ce^{-\left[4(x-5)^2 + 2(x-5)(y-3) + 5(y-3)^2\right]}$. Требуется определить: а) величину c; б) корреляционную матрицу системы.

7.18. Определить в точке *(2,2)* плотность распределения вероятностей системы двух нормальных случайных величин $\xi = (X, Y)$, для которых $M[X] = M[Y] = 0$ и $\| R \| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$.

7.19. Случайные величины X и Y некоррелированы. Доказать, что $M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$.

7.20. Случайные величины X, Y и Z попарно некоррелированы. Верно ли равенство $M[X \cdot Y \cdot Z] = M[X] \cdot M[Y] \cdot M[Z]$?

7.21. Система случайных величин $\xi = (X, Y)$ имеет плотность распределения вероятностей $p_\xi(x, y) = \dfrac{A}{\pi^2 (16 + x^2)(25 + y^2)}$. Определить величину A и найти функции распределения составляющих системы $\xi = (X, Y)$.

7.22. Координаты (X, Y) случайной точки A на плоскости подчинены нормальному закону $p_\xi(x, y) = \dfrac{1}{2\pi ab} \exp\left\{ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \right) \right\}$. Определить вероятность того, что точка A окажется внутри эллипса с главными полудиаметрами ka и kb, совпадающими с координатными осями Ox и Oy.

7.23. Распределение вероятностей случайной величины $\xi = (X, Y)$ задано формулами

$$P\{X = 0, Y = -1\} = P\{X = 0, Y = 1\} = P\{X = 1, Y = 0\} = P\{X = -1, Y = 0\} = 0{,}25.$$

Найти: а) $M[X]$ и $M[Y]$; б) $M[X|Y]$; в) $r[X,Y]$.

7.24. Случайные величины X и Y независимы и нормально распределены с одними и теми же параметрами a и σ. Найти коэффициент корреляции величин $aX + bY$ и $aX - bY$.

7.25. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_{n+m}$ $(n > m)$ независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию. Найти коэффициент корреляции между суммами $Z = X_1 + \ldots + X_n$ и $Q = X_{m+1} + \ldots + X_{m+n}$.

8. НЕЗАВИСИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. УСЛОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Основные понятия и теоремы раздела

Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если для любых полуинтервалов $[a_1,b_1)$ и $[a_2,b_2)$ события $\{a_1 \le X < b_1\}$ и $\{a_2 \le Y < b_2\}$ являются независимыми, т. е. $P\{a_1 \le X < b_1, a_2 \le Y < b_2\} = P\{a_1 \le X < b_1\} \cdot P\{a_2 \le Y < b_2\}$.

Для системы дискретных случайных величин $\xi=(X,Y)$ независимость означает, что совместное распределение вероятностей задается соотношением

$\rho_\xi(x_i, y_j) = \rho_X(x_i) \cdot \rho_Y(y_j)$.

В случае непрерывно распределенных случайных величин X и Y условие независимости принимает следующий вид:

$$P\{a_1 \le X < b_1, a_2 \le X < b_2\} = \iint_B p_\xi(x,y)\,dx\,dy,$$

где $B = [a_1,b_1) \times [a_2,b_2)$; $p_\xi(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$.

Случайные величины называются *независимыми,* если $F_\xi(x_1,...,x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot ... \cdot F_{X_n}(x_n)$, где $\xi = (X_1,....,X_n)$.

Теорема. Пусть $\xi = (X_1,...,X_n)$ – вектор с независимыми случайными компонентами. Если $F_{X_i}(x_i)$ есть функции распределения абсолютно непрерывного типа при каждом $i = \overline{1,n}$, то и $F_\xi(x_1,...,x_n)$ есть также функция распределения абсолютно непрерывного типа. Обратно, если $F_\xi(x_1,...,x_n)$ абсолютно непрерывна, то и $F_{X_i}(x_i)$ тоже абсолютно непрерывны для всех $i = \overline{1,n}$. При этом $p_\xi(x_1,...,x_n) = p_{X_1}(x_1) \cdot ... \cdot p_{X_n}(x_n)$ почти всюду, где $p_\xi(\cdot), p_{X_1}(\cdot),..., p_{X_n}(\cdot)$ – плотности соответственно для $F_\xi(\cdot), F_{X_1}(\cdot),..., F_{X_n}(\cdot)$.

Условным законом распределения вероятностей (УЗРВ) случайной величины X, входящей в систему $\xi = (X,Y,Z,...)$, называется ее закон распределения вероятностей, вычисленный при условии, что другие компоненты вектора $\psi = (Y,Z,...)$ приняли определенные значения $(y,z,...)$. УЗРВ можно задавать как функцией распределения вероятностей $F_{X|\psi}(x,y,...)$, так и плотностью распределения $p_{X|\psi}(x,y,...)$.

Если X и Y – дискретные случайные величины, то условное распределение $P\{X = k \mid Y = n\} \equiv \rho_{X|Y}(k,n)$, определяется как

$$\rho_{X|Y}(k,n) = \frac{\rho_\xi(k,n)}{\rho_Y(n)} = \frac{\rho_\xi(k,n)}{\sum_k \rho_Y(k,n)},$$

а условное распределение $P\{Y = n \mid X = k\} \equiv \rho_{Y|X}(k,n)$ – как

$$\rho_{Y|X}(k,n) = \frac{\rho_\xi(k,n)}{\rho_X(k)} = \frac{\rho_\xi(k,n)}{\sum_n \rho_X(k,n)},$$

где $\rho_\xi(k,n)$ – совместное распределение вероятностей случайных величин X и Y, составляющих вектор $\xi=(X,Y)$.

Для непрерывных случайных величин X и Y условные плотности распределения имеют вид

$$p_{Y|X}(y,x)=\frac{p_\xi(x,y)}{p_X(x)}, \qquad p_{X|Y}(x,y)=\frac{p_\xi(x,y)}{p_Y(y)},$$

где $p_\xi(x,y)$ – совместная плотность распределение вероятностей случайных величин X и Y и

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x,y)dy, \qquad p_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x,y)dx.$$

Случайная величина X не зависит от Y тогда и только тогда, когда ее условное распределение (при условии $Y=y$) не зависит от y и совпадает с исходным (безусловным) распределением.

Задачи с решениями

1. Дискретная случайная величина $\xi=(X,Y)$ задана таблицей:

Y \ X	3	6
10	0,25	0,1
15	0,15	0,05
18	0,32	0,13

Найти условный закон распределения вероятностей X при условии, что $Y = 10$, и условный закон распределения вероятностей Y при условии, что $X = 6$.

Решение. По определению условный закон в виде ряда распределения записывается следующим образом:

$$P\{X=x\,|\,Y=y\}=\frac{P\{X=x,Y=y\}}{P\{Y=y\}};\; P\{Y=y\,|\,X=x\}=\frac{P\{X=x,Y=y\}}{P\{X=x\}}.$$

Вычислим вероятность $P\{Y=10\}=0{,}25+0{,}1=0{,}35$ и применим записанную выше формулу для определения требуемого условного распределения:

$$P\{X=3\,|\,Y=10\}=0{,}25:0{,}35=5/7;\; P\{X=6\,|\,Y=10\}=0{,}1:0{,}35=2/7.$$

Условие нормировки выполняется: $5/7+2/7=1$.

Вероятность $P\{X=6\}=0{,}1+0{,}05+0{,}13=0{,}28$, тогда требуемое условное распределение примет вид

$$P\{Y=10\,|\,X=6\}=0{,}1:0{,}28=10/28;$$

$$P\{Y=15\,|\,X=6\}=0{,}05:0{,}28=5/28;$$

$$P\{Y=18\,|\,X=6\}=0{,}13:0{,}28=13/28.$$

Условие нормировки выполняется: $10/28+5/28+13/28=1$.

2. Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей:

$Y \backslash X$	–1	0	1
2	1/27	8/27	0
4	0	1/27	8/27
6	8/27	0	1/27

Найти корреляционный момент системы и вероятность $P\{X \geq 0 \mid Y = 4\}$.

Решение. Найдем безусловные законы распределения величин X и Y и условный закон $P\{X \mid Y = 4\}$.

X	–1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

Y	2	4	6
P	1/3	1/3	1/3

X	–1	0	1
$P\{X\|Y=4\}$	0	1/9	8/9

Искомая вероятность $P\{X \geq 0 \mid Y = 4\} = 1 - P\{X < 0 \mid Y = 4\} = 1 - 1/9 = 8/9 \approx 0{,}889$.

Корреляционный момент $R[X,Y] = M[(X - M[X])(Y - M[Y])]$. Найдем $M[X] = 0$ и $M[Y] = 4$. Тогда

$$R[X,Y] = (-1-0)\cdot(2-4)\cdot(1/27) + (0-0)\cdot(2-4)\cdot(8/27) + (1-0)\cdot(2-4)\cdot 0 +$$
$$+ (-1-0)\cdot(4-4)\cdot 0 + (0-0)\cdot(4-4)\cdot(1/27) + (1-0)\cdot(4-4)\cdot(8/27) +$$
$$+ (-1-0)\cdot(6-4)\cdot(8/27) + (0-0)\cdot(6-4)\cdot 0 + (1-0)\cdot(6-4)\cdot(1/27) = 4/9 \approx 0{,}444.$$

3. Положение случайной точки (X,Y) равновероятно в любом месте эллипса с главными полудиаметрами a и b, совпадающими с осями координат Ox и Oy соответственно. Требуется определить условные плотности распределения величин, входящих в систему.

Решение. Запишем плотность распределения вероятностей $\xi = (X,Y)$:

$$p_\xi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi ab} & \text{при} \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1; \\ 0 & \text{при} \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} > 1. \end{cases}$$

По определению условные плотности распределения компонент системы есть $p_{X|Y}(x,y) = \dfrac{p_\xi(x,y)}{p_Y(y)}$ и $p_{Y|X}(x,y) = \dfrac{p_\xi(x,y)}{p_X(x)}$. Найдем плотности распределения каждой из координат. При $-a \leq x \leq a$ плотность $p_\xi(x,y)$ отлична от нуля только тогда, когда $-b\sqrt{1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}\right)} \leq y \leq b\sqrt{1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}\right)}$, значит,

$$p_X(x)=\int\limits_{-b\sqrt{1-(x^2/a^2)}}^{b\sqrt{1-(x^2/a^2)}}\frac{1}{\pi ab}dy=\frac{2\sqrt{1-(x^2/a^2)}}{\pi a},\quad |x|\le a.$$

Аналогично рассуждая, находим:

$$p_Y(y)=\int\limits_{-a\sqrt{1-(y^2/b^2)}}^{a\sqrt{1-(y^2/b^2)}}\frac{1}{\pi ab}dx=\frac{2\sqrt{1-(y^2/b^2)}}{\pi b},\quad |y|\le b.$$

Теперь, применив определение, получаем:

$$p_{X|Y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} & \text{при}\quad |y|\le b,\ |x|\le a\sqrt{1-(y^2/b^2)};\\ 0 & \text{при}\quad |y|>b,\ |x|\le a\sqrt{1-(y^2/b^2)};\end{cases}$$

$$p_{Y|X}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a\sqrt{1-(y^2/b^2)}} & \text{при}\quad |x|\le a,\ |y|\le b\sqrt{1-(x^2/a^2)};\\ 0 & \text{при}\quad |x|>a,\ |y|\le b\sqrt{1-(x^2/a^2)}.\end{cases}$$

4. Задана плотность распределения вероятностей системы двух случайных величин $p_\xi(x,y)=ke^{-4x^2-6xy-9y^2}$. Определить постоянную *k*, корреляционный момент $R[X,Y]$ и условные плотности распределения случайных величин, входящих в систему.

Решение. Для определения *k* используем условие нормировки:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}ke^{-4x^2-6xy-9y^2}dx\,dy=1.$$

Отсюда $k=(3\sqrt{3})/\pi$.

Корреляционный момент есть $R[X,Y]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xy\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}e^{-4x^2-6xy-9y^2}dxdy=-\dfrac{1}{18}$.

Найдем безусловные плотности распределения вероятностей составляющих:

$$p_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{3\sqrt{3}}{\pi}e^{-4x^2-6xy-9y^2}dy=\sqrt{\frac{3}{\pi}}e^{-3x^2};\quad p_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{3\sqrt{3}}{\pi}e^{-4x^2-6xy-9y^2}dx=1{,}5\sqrt{\frac{3}{\pi}}e^{-6{,}75y^2}.$$

Условные плотности распределения вероятностей случайных величин, входящих в систему, находим по определению:

$$p_{X|Y}(x,y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-(2x+1{,}5y)^2};\qquad p_{Y|X}(x,y)=\frac{3}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+3y)^2}.$$

5. Доказать, что если *X* и *Y* связаны линейной зависимостью $Y=aX+b$, то абсолютная величина коэффициента корреляции равна единице при $a\ne 0$.

Решение. Корреляционный момент величин *X* и *Y* есть

$$R[X,Y]=M\big[(X-M[X])(Y-M[Y])\big]=M\big[(X-M[X])((aX+b)-M[aX+b])\big]=$$
$$=M\big[(X-M[X])(aX+b-aM[X]-b)\big]=M\big[a(X-M[X])(X-M[X])\big]=aD[X].$$

Дисперсия величины *Y* есть

$$D[Y]=M\big[(Y-M[Y])^2\big]=M\big[((aX+b)-M[aX+b])^2\big]=$$
$$=M\big[(aX+b-aM[X]-b)^2\big]=a^2D[X].$$

Найдем коэффициент корреляции величин X и Y:

$$r[X,Y]=\frac{R[X,Y]}{\sqrt{D[X]D[Y]}}=\frac{aD[X]}{\sqrt{a^2D[X]D[X]}}=\begin{cases}-1, & a<0;\\ +1, & a>0;\\ 0, & a=0.\end{cases}$$

Что и требовалось доказать.

6. Плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины $p_\xi(x,y)=(\cos x)(\cos y)$ в квадрате: $0\le x\le\pi/2$, $0\le y\le\pi/2$; вне квадрата: $p(x,y)=0$. Доказать, что составляющие X и Y независимы.

Решение. Случайные величины X и Y называются независимыми, если $p_\xi(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$. Найдем плотности распределения величин X и Y:

$$p_X(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)(\cos y)dy=\cos x;\quad p_Y(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)(\cos y)dx=\cos y.$$

Отсюда получаем, что $p_X(x)p_Y(y)=(\cos x)(\cos y)$. Следовательно, случайные величины X и Y являются независимыми.

7. По мишени производится один выстрел. Вероятность попадания в мишень равна p. Рассматриваются две случайные величины: X – число попаданий; Y – число промахов. Построить функцию распределения $F_\xi(x,y)$ двумерной случайной величины $\xi=(X,Y)$.

Решение. Случайные величины X и Y зависимы: $X + Y = 1$. Пусть p – вероятность попадания в мишень и $q = 1 – p$ – вероятность промаха, тогда таблица совместного распределения примет следующий вид:

Y \ X	0	1
0	0	p
1	q	0

Отсюда функция распределения $F_\xi(x,y)$ может быть записана следующим образом:

$$F_\xi(x,y)=\begin{cases}0, & \text{во всех случаях, кроме перечисленных ниже;}\\ p, & x>1 \text{ и } 0<y\le 1;\\ q, & 0<x\le 1 \text{ и } y>1;\\ 1, & x>1 \text{ и } y>1.\end{cases}$$

8. Система случайных величин $\xi=(X,Y,Z)$ равномерно распределена внутри прямоугольного параллелепипеда, образованного плоскостями $x=a_1$, $x=a_2$, $y=b_1$, $y=b_2$, $z=c_1$, $z=c_2$. Определить плотности распределения вероятностей подсистем $p_{(Y,Z)}(y,z)$ и $p_Z(z)$. Проверить зависимость случайных величин, входящих в систему.

Решение. Запишем плотность распределения вероятностей системы ξ:

$$p_{\xi}(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{(a_1-a_2)(b_1-b_2)(c_1-c_2)}, & \text{при} \quad a_1\le y\le a_2,\, b_1\le y\le b_2,\, c_1\le z\le c_2;\\ 0, & \text{вне параллепипеда}.\end{cases}$$

Для определения плотности распределения подсистемы (Y,Z) найдем интеграл $\int\limits_{a_1}^{a_2}\dfrac{1}{(a_1-a_2)(b_1-b_2)(c_1-c_2)}dx=\dfrac{1}{(b_1-b_2)(c_1-c_2)}$ и запишем плотность

$$p_{(Y,Z)}(y,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b_1-b_2)(c_1-c_2)}, & b_1\le y\le b_2,\, c_1\le z\le c_2;\\ 0, & \text{вне прямоугольника}.\end{cases}$$

Плотность распределения вероятностей величины Z примет вид

$$p_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{(c_1-c_2)}, & \text{при} \quad c_1\le z\le c_2;\\ 0, & \text{вне интервала}.\end{cases}$$

Аналогичным образом найдем

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(a_1-a_2)}, & \text{при} \quad a_1\le x\le a_2;\\ 0, & \text{вне интервала}.\end{cases}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b_1-b_2)}, & \text{при} \quad b_1\le y\le b_2;\\ 0, & \text{вне интервала}.\end{cases}$$

Теперь очевидно, что $p_{\xi}(x,y,z)=p_X(x)p_Y(y)p_Z(z)$, следовательно, случайные величины X, Y и Z независимы.

9. Заданы плотности распределения вероятностей независимых составляющих непрерывной двумерной случайной величины $\xi=(X,Y)$:

$$p_X(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0;\\ 5e^{-5x} & \text{при} \quad x\ge 0;\end{cases} \qquad p_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad y<0;\\ 2e^{-2y} & \text{при} \quad y\ge 0.\end{cases}$$

Найти плотность совместного распределения и функцию распределения вероятностей системы.

<u>Решение.</u> Для независимых случайных величин совместная плотность распределения вероятностей есть $p_{\xi}(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$. В нашем случае получим

$$p_{\xi}(x,y)=\begin{cases}10e^{-(5x+2y)}, & \text{при} \quad x\ge 0,\ y\ge 0;\\ 0, & \text{в остальных случаях}.\end{cases}$$

Функция распределения вероятностей

$$F_{\xi}(x,y)=F_X(x)F_Y(y)=\left(5\int\limits_0^x e^{-5t}dt\right)\left(2\int\limits_0^y e^{-2t}dt\right)=1-e^{-5x}-e^{-2y}+e^{-(5x+2y)}, \quad x\ge 0,\ y\ge 0.$$

10. Случайные величины X и Y независимы и распределены по закону Бернулли: $P\{X=k\}=P\{Y=k\}=pq^{k-1}, \quad p+q=1, \quad 0<p<1, \quad k=0{,}1$. Найти $P\{X=Y\}$ и $P\{X>Y\}$.

<u>Решение</u>. В силу независимости величин X и Y имеем

$P\{X=Y\}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}+P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}=q^2+p^2$,
$P\{X>Y\}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=0\}=pq$.

Задачи для самостоятельной работы

8.1. Дискретная случайная величина $\xi=(X,Y)$ задана таблицей:

Y \ X	2	3	7
2	0,1	0,15	0,25
7	0,15	0,25	0,1

Найти условное распределение величины X при условии, что $Y=2$, и условное распределение Y при условии, что $X=3$.

8.2. Дискретная случайная величина $\xi=(X,Y)$ задана таблицей:

Y \ X	2	5	8
0,4	0,15	0,3	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Найти условное математическое ожидание $M[X\mid y=0{,}4]$ и условную дисперсию $D[Y\mid x=2]$.

8.3. Плотность распределения вероятностей непрерывной двумерной случайной величины $\xi=(X,Y)$ имеет вид $P_\xi(x,y)=\frac{1}{\pi}\exp\left[-0{,}5(x^2+2xy+5y^2)\right]$. Найти условные плотности распределения величин X и Y.

8.4. Плотность распределения вероятностей непрерывной векторной случайной величины $\xi=(X,Y)$ имеет вид $P_\xi(x,y)=C\exp(-x^2-2xy-4y^2)$. Найти постоянный множитель C и условные плотности распределения вероятностей величин X и Y.

8.5. Непрерывная двумерная случайная величина $\xi=(X,Y)$ распределена равномерно внутри прямоугольного треугольника с вершинами $O(0;0)$, $A(0;8)$, $B(8,0)$. Найти двумерную плотность распределения вероятностей системы и условные плотности распределения вероятностей составляющих X и Y.

8.6. Задана плотность распределения вероятностей системы неотрицательных случайных величин X и Y: $p_\xi(x,y)=kxy\exp(-x^2-y^2),\quad x\ge 0,\quad y\ge 0$. Определить k, $p_X(x)$, $p_{X|Y}(x,y)$, $p_Y(y)$, $p_{Y|X}(x,y)$.

8.7. Плотность распределения вероятностей системы двух случайных величин $\xi=(X,Y)$ имеет вид $p_\xi(x,y)=A\exp(-ax^2+bxy-cy^2),\quad a>0,\quad c>0$. Определить законы распределения $p_X(x)$ и $p_Y(y)$. При каких условиях X и Y являются независимыми случайными величинами?

8.8. Случайные величины X и Y связаны соотношением $mX + nY = c$, где m, n и c – неслучайные величины ($m \neq 0$, $n \neq 0$). Найти: а) коэффициент корреляции $r[X,Y]$; б) отношение среднеквадратических отклонений $\sigma[X]/\sigma[Y]$.

8.9. Распределение вероятностей двумерного случайного вектора $\xi = (X,Y)$ задано таблицей:

Y \ X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
–1	0,001	0,002	0,005	0,006	0,014	0,021	0,021	0,008	0,002	0,001
0	0,001	0,001	0,002	0,003	0,008	0,010	0,040	0,023	0,012	0,002
1	0,002	0,005	0,010	0,089	0,154	0,231	0,180	0,098	0,048	0,009

Найти условные распределения: Y при условии, что $X = 6$, и X при условии, что $Y = 0$, и корреляционную матрицу системы.

8.10. Система независимых случайных величин $X_1,...,X_n$ задана плотностями вероятностей $p_{X_1}(x_1),..., p_{X_n}(x_n)$. Определить функцию распределения вероятностей этой системы случайных величин.

8.11. Система двух случайных величин $\xi = (X,Y)$ подчиняется нормальному закону распределения

$$p_{\xi}(x,y) = k\exp\left\{-\frac{1}{0,72\sigma^2}\left[(x-5)^2 + 0,8(x-5)(y+2) + 0,25(y+2)^2\right]\right\}.$$

Определить: а) условные плотности распределения вероятностей случайных величин, входящих в систему; б) условные математические ожидания и дисперсии.

8.12. Изготовляемые в цехе втулки сортируются на 4 группы по отклонению их внутреннего диаметра от нормального размера и на 4 группы по овальности втулок. Совместное распределение отклонений диаметра (X) и овальности втулок (Y) задано таблицей:

Y \ X	0,01	0,02	0,03	0,04
0,002	0,01	0,02	0,04	0,04
0,004	0,03	0,24	0,15	0,06
0,006	0,04	0,10	0,08	0,08
0,008	0,02	0,04	0,03	0,02

Найти: а) коэффициент корреляции между ними; б) распределение отклонений диаметра и условное распределение овальности при условии, что отклонение диаметра равно *0,03*; в) распределение овальности и условное распределение отклонения диаметра при условии, что овальность равна *0,004*.

8.13. Случайные величины X и Y независимы и нормально распределены с параметрами $M[X]=M[Y]=0$, $D[X]=D[Y]=1$. Найти вероятность того, что случайная точка (X,Y) попадет в кольцо $2 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 3$.

8.14. Положение случайной точки (X,Y) равно возможно в любом месте круга радиуса R, центр которого совпадает с началом координат. Определить плотность распределения вероятностей и функцию распределения вероятностей каждой из прямоугольных координат X и Y. Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

8.15. Система случайных величин X и Y подчинена равномерному закону распределения вероятностей внутри квадрата со стороной a. Диагонали квадрата совпадают с осями координат. Определить плотность распределения системы и условные плотности распределения вероятностей составляющих, проверить их зависимость и коррелированность.

8.16. Случайные величины X, Y и Z равномерно распределены внутри сферы радиуса R. Определить для точек, лежащих внутри сферы, плотность распределения вероятностей координаты Z и условную плотность $p_{(X,Y)|Z}(x,y,z)$.

8.17. Для системы случайных величин $\xi=(X,Y)$ известны $p_Y(y)$, $M[X\,|\,Y=y_0]$ и $D[X\,|\,Y=y_0]$. Определить $M[X]$ и $D[X]$.

8.18. Положение ориентира на плоскости распределено по нормальному закону с параметрами $M[X]=125$ *м*, $M[Y]=-30$ *м*, $\sigma[X]=40$ *м*, $\sigma[Y]=30$ *м*, $r[X,Y]=0{,}6$. Координата X определяет отклонение ориентира «по дальности», т. е. по направлению, параллельному линии наблюдения. Координата Y определяет отклонение ориентира «по боковому направлению», перпендикулярному линии наблюдения. Определить условную плотность распределения вероятностей отклонений ориентира по дальности при отсутствии боковых отклонений и условную плотность распределения вероятностей отклонений ориентира по боковому направлению при отклонении по дальности +25 *м*.

8.19. Координаты случайной точки на плоскости подчиняются нормальному закону распределения вероятностей

$$p_\xi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2r(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

Определить условные плотности $p_{X|Y}(x,y)$, $p_{Y|X}(x,y)$, условные математические ожидания и условные дисперсии.

8.20. Непрерывная двумерная случайная величина $\xi=(X,Y)$ распределена равномерно внутри прямоугольника с центром симметрии в начале координат и сторонами $2a$ и $2b$, параллельными координатным осям. Найти плотности распределения вероятностей величин X и Y и плотность распределения системы ξ.

8.21. Изделия некоторого производства подвергаются выборочному контролю. Каждое изделие может с вероятностью p оказаться годным и с вероятностью q – дефектным. В то же время изделие может быть проверено с вероятностью $\hat{p}$ и не проверено с вероятностью $\hat{q}$. Изделия выбираются до обнаружения первого дефектного изделия. Пусть X – число изделий, прошедших через стол контролера, из них Y – число дефектных, но не обнаруженных. Найти: а) совместное распределение (X,Y); б) распределения X и Y; в) $M[X]$ и $M[Y]$; г) корреляционный момент $R[X,Y]$.

8.22. Пусть случайные величины X, Y и $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ независимы и одинаково распределены. Найти вероятность того, что хотя бы одна из величин X и Y примет значение, большее каждой из величин $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$.

9. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ФУНКЦИЙ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Основные понятия раздела

Теория вероятностей в своей прикладной части связана прежде всего с решением следующей (типичной) задачи: по функции распределения $F_\eta(x_1,...,x_n)$ системы случайных величин $\eta \equiv (X_1,...,X_n)$ необходимо определить функцию распределения $F_\xi(y_1,...,y_k)$ системы случайных величин $\xi \equiv (Y_1,...,Y_k)$, если известны функциональные зависимости $Y_j = \varphi_j(X_1,...,X_n)$; $j = \overline{1,k}$. При этом возможны следующие варианты задач: а) $1 \Rightarrow 1$; б) $2 \Rightarrow 2$; в) $n \Rightarrow 1$; г) $n \Rightarrow k : k$ – любое целое число.

Для непрерывных случайных величин задача а) $1 \Rightarrow 1$ формулируется следующим образом: по плотности распределения вероятностей $p_X(x)$ случайной величины X определить плотность $p_Y(y)$ случайной величины $Y = \varphi(X)$. Если функция $\varphi(X)$ является монотонной и дифференцируемой, то плотность величины Y определяется по формуле

$$p_Y(y) = p_X\left(\varphi^{-1}(y)\right) \cdot \left| \frac{d}{dy}\varphi^{-1}(y) \right|.$$

Если же функция $\varphi(X)$ такова, что обратная ей функция неоднозначна, т. е. одному значению аргумента y соответствует несколько значений функции $\varphi_k^{-1}(y)$, то в соответствии с теоремой сложения вероятностей несовместных событий $p_Y(y) = \sum\limits_{k=1}^{n} p_X\left(\varphi_k^{-1}(y)\right) \cdot \left| \frac{d}{dy}\varphi_k^{-1}(y) \right|$.

Пусть система двух случайных величин $W = (U,V)$ является результатом функционального преобразования системы случайных величин $\xi = (X,Y)$ (вариант $2 \Rightarrow 2$). Предполагается, что прямое

$$U = \varphi_U(X,Y),$$
$$V = \varphi_V(X,Y)$$

и обратное

$$X = \varphi_X(U,V),$$
$$Y = \varphi_Y(U,V)$$

преобразования взаимно однозначны, непрерывны и дифференцируемы. Тогда, зная плотность $p_\xi(x,y)$ системы ξ, можно найти плотность $p_W(u,v)$ системы W по формуле

$$p_W(u,v) = p_\xi(\varphi_X(u,v), \varphi_Y(u,v)) \cdot |J|,$$

где якобиан преобразования $J \equiv \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$.

Если $\xi = (X_1,...,X_n)$ и $Y = \varphi(\xi) \equiv \varphi(X_1,...,X_n)$, то, в частности, при $n = 2$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi\left(z, \varphi^{-1}(y,z)\right) \cdot \left| \frac{\partial}{\partial y} \varphi^{-1}(y,z) \right| dz.$$

Задачи с решениями

1. Случайная величина X распределена по закону, заданному таблицей:

X	–1	0	1
P	0,2	0,3	0,5

Найти закон распределения вероятностей величины $Y = X^4$.

Решение. Для построения закона распределения найдем соответствующие вероятности:

$P\{Y = 1\} = P\{X = -1\} + P\{X = 1\} = 0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}7$;

$P\{Y = 0\} = P\{X = 0\} = 0{,}3$.

Отсюда окончательно получаем:

Y	0	1
P	0,3	0,7

2. Случайная величина X распределена равномерно на интервале $(0, \pi)$. Найти закон распределения вероятностей случайной величины $Y = \cos X$.

Решение. Функция $\varphi(x) = \cos X$ является монотонной на заданном интервале. Она имеет обратную функцию $\varphi^{-1}(y) = \arccos Y$, следовательно, для нахождения закона распределения Y применима формула

$$p_Y(y) = p_X\left(\varphi^{-1}(y)\right) \left| \left(\varphi^{-1}(y)\right)' \right|,$$

где $p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & 0 \le x \le \pi; \\ 0, & \text{в остальных случаях}; \end{cases}$ и $\left| \left(\varphi^{-1}(y)\right)' \right| = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$.

Окончательно имеем

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1 - y^2}}, & -1 < y < 1; \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

3. Законы распределения числа очков, выбиваемых независимо каждым из двух стрелков, заданы таблицами:

X	1	2	3
P	0,1	0,3	0,6

Y	1	2	3
P	0,2	0,3	0,5

Найти закон распределения вероятностей суммы очков, выбиваемых двумя стрелками.

Решение. Новая случайная величина $Z = X + Y$ принимает значения: *2, 3, 4, 5, 6* с вероятностями:

$P\{Z = 2\} = P\{X = 1, Y = 1\} = 0{,}02;$

$P\{Z = 3\} = P\{X = 1, Y = 2\} + P\{X = 2, Y = 1\} = 0{,}09;$

$P\{Z = 4\} = P\{X = 1, Y = 3\} + P\{X = 2, Y = 2\} + P\{X = 3, Y = 1\} = 0{,}26;$

$P\{Z = 5\} = P\{X = 2, Y = 3\} + P\{X = 3, Y = 2\} = 0{,}33;$

$P\{Z = 6\} = P\{X = 3, Y = 3\} = 0{,}3.$

Условие нормировки выполняется: $0{,}02 + 0{,}09 + 0{,}26 + 0{,}33 + 0{,}3 = 1$.

4. Независимые случайные величины X и Y распределены нормально с параметрами $M[X] = 2$, $M[Y] = -3$, $D[X] = 4$, $D[Y] = 9$. Найти плотность распределения вероятностей и функцию распределения вероятностей их суммы.

Решение. Если известны плотности распределения вероятностей $p_X(x)$ и $p_Y(y)$ независимых случайных величин *X* и *Y*, то плотность распределения их суммы $Z = X + Y$ записывается следующим образом:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) p_Y(z - x) dx .$$

Применив эту формулу для нашего случая, получим:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-(x-2)^2/8} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-((z-x)+3)^2/18} dx = \frac{1}{\sqrt{26\pi}} e^{-(z+1)^2/26}, \quad -\infty < z < \infty .$$

Зная плотность, найдем функцию распределения вероятностей:

$$F_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{26\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-(t+1)^2/26} dt .$$

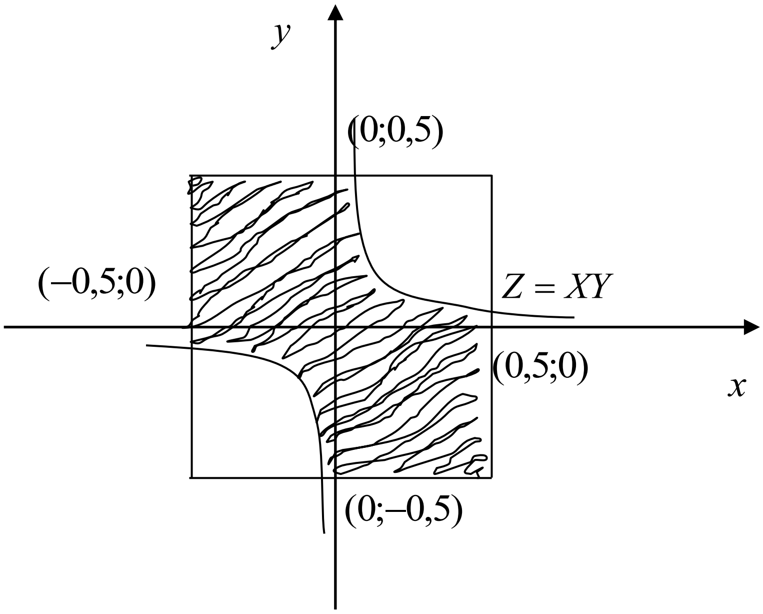
5. Система случайных величин $\xi = (X, Y)$ распределена нормально с плотностью распределения вероятностей $p_\xi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{2}\right\}$. Найти плотность распределения вероятностей системы $\eta = (R, A)$, если $X = R\cos A$, $Y = R\sin A$.

Решение. Для определения плотности распределения вероятностей системы η применим формулу $p_\eta(r, \alpha) = p_\xi(\varphi_X(r, \alpha), \varphi_Y(r, \alpha)) | J |$, где $\varphi_X(r, \alpha) = R\cos A$, $\varphi_Y(r, \alpha) = R\sin A$ есть обратное преобразование и $J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \alpha)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \end{vmatrix}$ – якобиан обратного преобразования. Подставив в формулу плотности системы ξ заданные преобразования и найденное значение якобиана, получим:

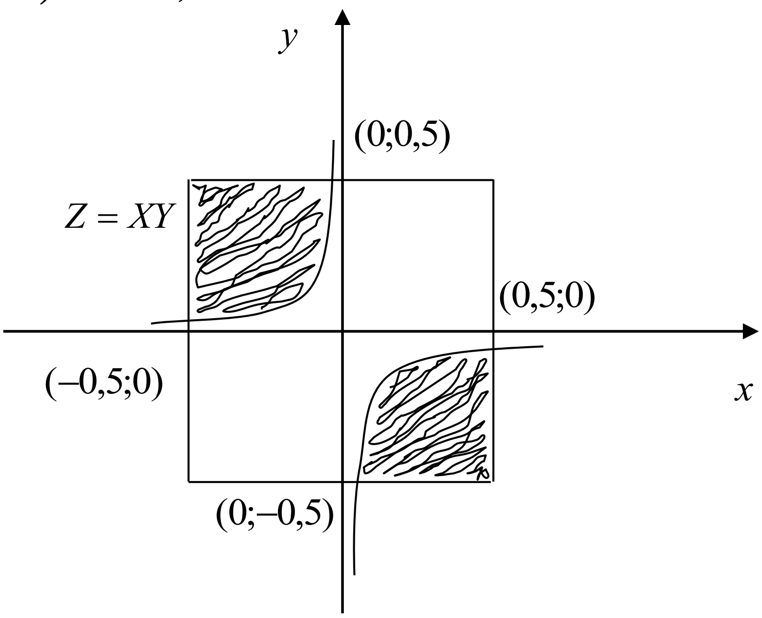
$$p_\eta(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{r^2 \cos\alpha + r^2 \sin\alpha}{2}\right\} \left\| \begin{matrix} \cos\alpha & r\sin\alpha \\ \sin\alpha & -r\cos\alpha \end{matrix} \right\| = \frac{r}{2\pi} \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}, \; r > 0 .$$

6. Положение случайной точки (X, Y) равновероятно внутри квадрата со сторонами *1* и с центром в начале координат. Определить плотность распределения вероятностей случайной величины $Z = XY$.

Решение. Для функции нескольких случайных аргументов удобнее решать задачу исходя из формулы функции распределения вероятностей. Рассмотрим отдельно два случая: а) $0 < z < 0{,}25$ и б) $-0{,}25 < z < 0$ (рис. 9.1 а), б)).



а) $0 < z < 0{,}25$



б) $-0{,}25 < z < 0$

Рис. 9.1. Гиперболы $Z = XY$. Заштрихованы области, где $Z < z$

Функция распределения случайной величины Z определяется следующим образом в случае:

а) $F_Z(z) = P\{Z < z\} = 1 - P\{Z > z\} = 1 - 2\int\limits_{2z}^{0,5} dy \int\limits_{z/y}^{0,5} dx = 0{,}5 + z - 2z\ln(4z)$, б) $F_Z(z)=P\{Z<z\}=2\int\limits_{-2z}^{0,5}dy\int\limits_{-0,5}^{z/y}dx=0,5+z-2z\ln(-4z)$.

Дифференцируя эти выражения по z, получим плотность распределения вероятностей: а) $p_Z(z)=-2\ln 4z$, б) $p_Z(z)=-2\ln(-4z)$. Отсюда окончательно получаем

$$p_Z(z)=\begin{cases}-2\ln 4|z| & \text{при } \quad |z|<0,25;\\ 0 & \text{при других значениях } z.\end{cases}$$

7. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $(0,1)$. Определить плотность распределения вероятностей величины

$$Y=\begin{cases}\sqrt{X} & \text{при} \quad X\ge 0;\\ \sqrt{-X} & \text{при} \quad X<0.\end{cases}$$

Решение. В рассматриваемом случае обратная функция неоднозначна, т. к. одному и тому же значению Y соответствуют два значения: $X_1=Y^2=\varphi_1^{-1}(Y)$, $X_2=-Y^2=\varphi_2^{-1}(Y)$. Поскольку обратное преобразование двузначно, плотность находится по формуле $p_Y(y)=\sum\limits_{k=1}^{2}p_X\left(\varphi_k^{-1}(y)\right)\left|\left(\varphi_k^{-1}(y)\right)'\right|$. Отсюда получаем

$$p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(y^2)^2/2}2y+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(-y^2)^2/2}2y=\frac{4y}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^4/2} \text{ при } y\ge 0.$$

В оставшихся случаях $p_Y(y)=0$.

8. Случайные величины X и Y независимы и распределены по закону Пуассона: $P\{X=k\}=\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}$, $P\{Y=k\}=\frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}$, $k=0,1,2,\ldots$. Найти закон распределения величины $Z=X+Y$.

Решение. Для независимых случайных величин X и Y с дискретным распределением закон распределения их суммы находится по формуле

$$P\{Z=m\}=\sum_{k=0}^{m}P\{X=k\}P\{Y=m-k\},\quad m=0,1,2,\ldots,$$

где m есть сумма значений величин X и Y. Применим эту формулу для нашего случая:

$$P\{Z=m\}=\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{m-k}}{(m-k)!}e^{-\lambda_2}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{m-k}}{k!(m-k)!}\frac{m!}{m!}=$$

$$=\frac{1}{m!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{m-k}=\frac{1}{m!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^m.$$

Таким образом, сумма независимых случайных величин, распределенных по закону Пуассона, также имеет распределение Пуассона.

9. Независимые случайные величины X и Y имеют показательное распределение с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Найти плотность распределения вероятностей и математическое ожидание величины $Z=X/Y$.

Решение. Закон распределения вероятностей частного двух независимых случайных величин в общем случае находится по формуле $p_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_X(zy) p_Y(y) |J| dy$. Введя обозначения для обратного преобразования: $Y = V$, $X = ZV$, найдем якобиан: $J = \begin{vmatrix} z & v \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -v$. Определим плотность распределения

$$p_Z(z) = \int\limits_0^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 (zv)} \lambda_2 e^{-\lambda_2 v} v dv = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 z + \lambda_2)^2}, \quad z > 0.$$

Математическое ожидание величины Z есть

$$M[Z] = \int\limits_0^{\infty} z \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 z + \lambda_2)^2} dz = \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2 (\lambda_1 z + \lambda_2)^2} + \frac{1}{\lambda_1^2} \ln|\lambda_1 z + \lambda_2| \right] \Bigg|_0^{\infty}.$$

Интеграл в заданных пределах не существует, т. к. $\ln(\infty) = \infty$, следовательно, случайная величина Z не имеет математического ожидания.

10. Заданы плотности равномерно распределенных независимых случайных величин X и Y: $p_X(x) = p_Y(y) = 1$ в замкнутом интервале $[0,1]$, вне этого интервала $p_X(x) = p_Y(y) = 0$. Найти плотность распределение вероятностей и дисперсию случайной величины $Z = X - Y$.

Решение. Закон распределения вероятностей разности двух независимых случайных величин в общем случае задается формулой $p_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_X(x) p_Y(x - z) |J| dx$. Имея в виду обратное преобразование $X = V$ и $Y = V - Z$, вычислим якобиан: $J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$. Подставляя в общую формулу значение якобиана и плотностей составляющих и учитывая, что значения величины Z изменяются в интервале $[-1,1]$ (причем, т. к. $X = Z + Y$ при $-1 < z < 0, -1 < x < z$, а при $0 \le z < 1$, $z < x < 1$), получим:

$$p_Z(z) = \begin{cases} \int\limits_{-1}^{z} dx = z + 1 & \text{при} \quad -1 < z < 0; \\ \int\limits_{z}^{1} dx = 1 - z & \text{при} \quad 0 \le z < 1; \\ 0 & \text{при прочих значениях } z. \end{cases}$$

Таким образом, величина Z имеет известное распределение Симпсона. Дисперсия $D[Z] = 1/12$.

Задачи для самостоятельной работы

9.1. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[0,\pi]$. Найти плотности распределения и функции распределения вероятностей величин $Y = \sin X$ и $Z = 2X + 1$.

9.2. Выработка двух бригад маляров, работающих независимо, характеризуется следующими данными:

X	200	190	280	210
P	?	0,1	0,1	0,4

Y	200	290	170	160
P	0,4	?	0,1	0,1

Составить закон распределения вероятностей суммарной выработки бригад маляров.

9.3. Количество электроэнергии X, потребляемое первым предприятием, и количество электроэнергии Y, потребляемое вторым предприятием, заданы таблично:

X	800	850	900
P	0,2	?	0,6

Y	850	900	1000
P	?	0,5	0,1

Составить закон распределения количества энергии, потребляемой обоими предприятиями и найти математическое ожидание и дисперсию новой случайной величины.

9.4. Пусть X и Y – независимые случайные величины, имеющие одинаковое показательное распределение. Найти плотность распределения вероятностей и асимметрию случайной величины $Z = X + Y$.

9.5. Случайная величина X имеет геометрическое распределение. Найти функцию распределения случайной величины $Y = X^2$.

9.6. Дискретная случайная величина X задана таблицей:

X	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
P	0,2	0,7	0,1

Найти закон распределения вероятностей и дисперсию величины $Y = \sin X$.

9.7. Случайная величина X распределена по закону Коши. Найти плотность распределения вероятностей величин $Y = 1 - X^2$, $Z = 1/X$, $Q = \mathrm{arctg} X$.

9.8. Найти закон распределения вероятностей суммы двух независимых случайных величин, распределенных по геометрическому закону.

9.9. Случайные величины X и Y независимы и равномерно распределены на отрезке $[-1,1]$. Найти плотность распределения величины $Z = XY$.

9.10. Найти математическое ожидание и дисперсию произведения двух независимых случайных величин X и Y с равномерным законом распределения вероятностей: X – на отрезке $[0,1]$ и Y – на отрезке $[1,3]$.

9.11. Задана плотность распределения случайной величины X:

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & -\pi/2 \le x \le \pi/2; \\ 0, & \text{вне этого интервала.} \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей величины $Y = \mathrm{tg} X$.

9.12. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $(0,1)$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = X^2$.

9.13. Случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin X, & \text{на отрезке } [0,\pi]; \\ 0, & \text{вне этого интервала.} \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей величин $Y = X^2$ и $Z = \sqrt{X}$.

9.14. Найти распределение вероятностей суммы независимых случайных величин X и Y, заданных функциями распределения вероятностей $F_X(x) = F_Y(x) = 1/2 + (1/\pi)\mathrm{arctg} x$.

9.15. Дискретные независимые случайные величины X и Y заданы распределениями:

X	1	3
P	0,3	0,7

Y	2	4
P	0,6	0,4

Найти распределение вероятностей величины $Z = X - Y$.

9.16. Независимые случайные величины X и Y заданы плотностями распределений $p_X(x) = e^{-x}$, $0 \le x < \infty$; $p_Y(y) = (1/2)e^{-y/2}$, $0 \le y < \infty$. Найти плотность распределения вероятностей величины $Z = X - Y$.

9.17. Найти закон распределения вероятностей суммы случайных величин X и Y, имеющих следующее распределение:

$$p_X(x) = p_Y(x) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|x|}{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

9.18. Плотности независимых случайных величин X и Y равны

$$p_X(x) = p_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & \text{при} \quad 0 < x \le a; \\ 0 & \text{вне этого интервала.} \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей частного $Z = X/Y$.

9.19. Бросаются три игральные кости. Пусть X – сумма очков, выпадающих на их верхних гранях. Найти закон распределения вероятностей случайной величины X.

9.20. Найти плотность распределения вероятностей модуля радиуса-вектора $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, если случайные величины X и Y независимы и распределены по нормальному закону с параметрами $M[X] = M[Y] = 0$, $D[X] = D[Y] = \sigma^2$.

9.21. Случайная величина X имеет плотность распределения вероятностей $p_X(x)$. Найти плотность величин $Y = 2X$, когда $-a < X < a$, и $Z = -2X$, когда $a < X < b$.

9.22. Случайная величина X распределена по закону

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ e^{-x^{-\alpha}}, & x > 0\ (\alpha > 0). \end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей случайной величины $Y = -1/X$.

9.23. Случайная величина X имеет плотность

$$p_X(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Найти законы распределения вероятностей величин $Y = X^3$, $Z = e^X$, $V = \ln X$.

9.24. Случайная величина X распределена нормально с параметрами (a, σ^2). Доказать, что линейное преобразование $Y = AX + B$ также распределено нормально.

9.25. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Z = X/Y$, если X и Y независимы и подчиняются закону распределения Рэлея с параметром σ.

9.26. Найти функцию распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = X + YX$, где X и Y независимы, причем X имеет нормальное распределение с параметрами $(0,1)$, а Y – бинарная случайная величина с распределением $P\{Y = -1\} = P\{Y = 1\} = 0{,}5$.

10. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Основные понятия, теоремы и следствия раздела

Среди дискретных случайных величин особое место занимают величины, принимающие только целые неотрицательные значения (0, 1, 2, …). Такие случайные величины называются неотрицательными целочисленными (НЦСВ).

Сумма степенного ряда $\nu_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_X(n) s^n$ называется *производящей функцией вероятностей* (ПФВ) $\rho_X(n) \equiv P\{X = n\}$. ПФВ является *аналитической* функцией аргумента при $|s| < 1$, и приведенная формула дает ее разложение в степенной ряд. Это определение может быть записано в виде математического ожидания $\nu_X(s) = M[s^X]$.

<u>Теорема 1</u>. Распределение вероятностей $\{\rho_X(n)\}$ НЦСВ X однозначно определяется соответствующей ПФВ посредством формулы

$$\rho_X(n) = \frac{1}{n!}\nu_X^{(n)}(0).$$

<u>Теорема 2</u>. Если факториальный момент n-го порядка НЦСВ X существует, то $f_n[X] = \nu_X^{(n)}(1)$.

<u>Следствие 1</u>. Для математического ожидания $M[X]$ НЦСВ X (если оно существует) справедливо выражение $M[X] = \nu_X^{(1)}(1)$.

<u>Следствие 2</u>. Для дисперсии $D[X]$ НЦСВ X справедливо выражение

$$D[X] = \nu_X^{(2)}(1) - (\nu_X^{(1)}(1))^2 + \nu_X^{(1)}(1),$$

если эта дисперсия существует (т.е. $D[X] < \infty$).

<u>Теорема 3</u>. Если $X=X_1+...+X_n$, и слагаемые в этой сумме представляют собой независимые НЦСВ, то $\nu_X(s) = \nu_{X_1}(s) \ldots \nu_{X_n}(s)$.

В частности, если величины X_1, ..., X_n одинаково распределены и имеют ПФВ $\nu(s)$, то $\nu_X(s) = (\nu(s))^n$.

<u>Теорема 4</u>. Сумма $Y = X_1 + ... + X_N$ случайного числа независимых и одинаково распределенных НЦСВ имеет ПФВ $\nu_Y(s) = \nu_N(\nu_X(s))$, где $\nu_X(s)$ – ПФВ слагаемых, $\nu_N(\cdot)$ – ПФВ числа слагаемых.

<u>Теорема 5</u>. ПФВ случайной величины $Y = mX + n$, где m, n – неотрицательные целые числа, а X – НЦСВ, имеет вид $\nu_Y(s) = s^n \cdot \nu_X(s^m)$.

<u>Основные свойства ПФВ</u>.

П1. Функция $\nu(s)$, определенная на замкнутом интервале от 0 до 1, является производящей функцией вероятностей некоторой случайной величины, если $\nu(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$, где $a_0+a_1+a_2+...=1$, $a_n \geq 0$.

П2. ПФВ монотонно возрастает при $s \to 1$ от $\nu_X(0) = \rho_X(0)$ до $\nu_X(1) = 1$. Последнее равенство имеет место, если $P\{|X| < \infty\} = 1$.

Задачи с решениями

1. Пусть p – вероятность «успеха» в независимых испытаниях Бернулли, а X – число «неудач», предшествующих первому «успеху». Найти производящую функцию вероятностей величины X.

<u>Решение</u>. Для нахождения производящей функции вероятностей воспользуемся ее определением вида $\nu_X(s) = \sum\limits_k P\{X = k\} s^k$. Согласно условий задачи величина X имеет геометрическое распределение

$$P\{X = k\} = pq^k, \; p + q = 1, \; k = 0,1,\dots .$$

Отсюда получаем

$$\nu_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} pq^k s^k = p\sum_{k=0}^{\infty}(qs)^k = \frac{p}{1 - qs}.$$

2. Найти распределение, которому соответствует производящая функция вероятностей $\nu_X(s) = (1/4)(1+s)^2$.

<u>Решение</u>. Для нахождения распределения величины X воспользуемся свойством функции $\nu_X(s)$ производить вероятности, с которыми неотрицательная целочисленная случайная величина принимает свои значения:

$$P\{X = k\} = \frac{1}{k!}\nu_X^{(k)}(0), \quad k = 0,1,\dots .$$

Найдем последовательно производные производящей функции и вычислим их значения в точке 0:

$$P\{X = 0\} = \frac{1}{0!}\cdot\frac{1}{4}\cdot(1+s)^2\Big|_{s=0} = \frac{1}{4}; \qquad P\{X = 1\} = \frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2(1+s)\Big|_{s=0} = \frac{1}{2};$$

$$P\{X = 2\} = \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\Big|_{s=0} = \frac{1}{4}; \qquad P\{X = k\} = 0 \text{ при } k > 2.$$

Таким образом, заданная производящая функция вероятностей соответствует биномиальному распределению с параметрами $p = 0{,}5$ и $n = 2$.

3. Пусть неотрицательная целочисленная случайная величина X имеет производящую функцию $\nu_X(s)$. Найти производящие функции величин $Y = nX$ и $Z = X + n$ (n – целое неотрицательное число).

<u>Решение</u>. Для нахождения производящих функций величин Y и Z применим определение $\nu_X(s) = M\left[s^X\right]$. Подставляя выражения для Y и Z в эту формулу и используя свойства математического ожидания, получим:

$$\nu_Y(s) = M\left[s^Y\right] = M\left[s^{nX}\right] = M\left[\left(s^n\right)^X\right] = \nu_X(s^n).$$

$$\nu_Z(s) = M\left[s^Z\right] = M\left[s^{X+n}\right] = M\left[s^X \cdot s^n\right] = M\left[s^X\right]\cdot M\left[s^n\right] = s^n \nu_X(s).$$

4. Неотрицательная целочисленная случайная величина X задана производящей функцией $\nu_X(s) = 0{,}5 + 0{,}2s + 0{,}3s^2$. Найти дисперсию величины X.

<u>Решение</u>. Для дисперсии неотрицательной целочисленной случайной величины X справедливо выражение $D[X] = \nu_X''(1) - \left(\nu_X'(1)\right)^2 + \nu_X'(1)$. Используя эту формулу, находим $\nu_X'(1) = \left[0{,}2 + 0{,}3 \times 2 \times s\right]\Big|_{s=1} = 0{,}8$ и $\nu_X''(1) = 0{,}6$. Тогда

$$D[X] = 0{,}6 - 0{,}64 + 0{,}8 = 0{,}76.$$

5. Законы распределения вероятностей независимых случайных величин *X*, *Y* и *Z* заданы таблично:

X	1	2
P	0,7	0,3

Y	0	2
P	0,5	0,5

Z	0	1
P	0,2	0,8

Найти производящую функцию и распределение (в форме таблицы) для величины $Q = X + Y + Z$.

Решение. Для нахождения распределения величины Q определим ее производящую функцию и по ней построим таблицу. Известно, что производящая функция вероятностей суммы независимых неотрицательных целочисленных случайных величин равняется произведению производящих функций слагаемых. По определению вида $\nu_X(s) = \sum_k P\{X = k\} s^k$ имеем $\nu_X(s) = 0{,}7s + 0{,}3s^2$; $\nu_Y(s) = 0{,}5(1 + s^2)$; $\nu_Z(s) = 0{,}2 + 0{,}8s$. Отсюда

$$\nu_Q(s) = \nu_X(s)\nu_Y(s)\nu_Z(s) = (0{,}7s + 0{,}3s^2)(0{,}5(1 + s^2))(0{,}2 + 0{,}8s) =$$

$$= 0{,}07s + 0{,}31s^2 + 0{,}19s^3 + 0{,}31s^4 + 0{,}12s^5.$$

Распределение в форме таблицы имеет следующий вид:

X	1	2	3	4	5
P	0,07	0,31	0,19	0,31	0,12

Условие нормировки выполняется: $0{,}07 + 0{,}31 + 0{,}19 + 0{,}31 + 0{,}12 = 1$.

5. Пусть X – неотрицательная целочисленная случайная величина с производящей функцией $\nu_X(s)$. Найти $M[2X + 1]$.

Решение. Зная производящую функцию вероятностей, математическое ожидание величины X можно найти по формуле $M[X] = \nu'_X(1)$. Введем обозначение $Y = 2X + 1$ и на основании свойств производящей функции (см. задачу 3) найдем $\nu_Y(s) = s\nu_X(s^2)$. Отсюда

$$M[2X + 1] = \left[s\nu_X(s^2)\right]'\Big|_{s=1} = \left[\nu_X(s^2) + s\nu'_X(s^2)2s\right]\Big|_{s=1} = \nu_X(1) + 2\nu'_X(1) = 1 + 2\nu'_X(1).$$

7. Найти производящую функцию $\nu_X(s)$ числа X успехов в n независимых испытаниях Бернулли, если вероятность успеха в каждом испытании равна p.

Решение. Согласно условиям задачи случайная величина X представляет собой сумму независимых бернуллиевских величин $X_i, i = \overline{1,n}$ $\left(P\{X = k\} = p^k q^{1-k}, p + q = 1, k = 0{,}1\right)$, что соответствует определению величины, имеющей биномиальное распределение. Известно, что если $X = X_1 + ... + X_n$ и слагаемые в этой сумме независимые неотрицательные целочисленные случайные величины, то $\nu_X(s)=\nu_{X_1}(s)...\nu_{X_n}(s)$. Найдем производящие функции величин X_i: $\nu_{X_i}(s)=(1-p)s^0+ps^1=q+ps$. Окончательно получим

$\nu_X(s)=(q+ps)^n$.

8. Покажите, что функция $f_X(s)=0{,}1+0{,}2s+0{,}4s^2+0{,}3s^5$ может быть производящей функцией вероятностей случайной величины *X*.

<u>Решение</u>. Любая степенная функция $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...$ может быть признана производящей функцией вероятностей, если она отвечает следующим свойствам:

1) коэффициенты $a_i\ge 0$, и их сумма равна *1*;

2) функция $f(x)$ монотонно возрастает при $x\to 1$ от $f(0)=a_0$ до $f(1)=1$.

Функция $f_X(s)$ является степенной. Проверим выполнение необходимых условий:

1) коэффициенты при степенях *s* положительны, а их сумма равняется $0{,}1+0{,}2+0{,}4+0{,}3=1$;

2) при $s\to 1$ функция возрастает от $f_X(0)=0{,}1$ до $f_X(1)=1$.

Таким образом, заданная функция $f_X(s)$ может быть производящей функцией вероятностей величины *X*.

9. Независимые случайные величины *X* и *Y* заданы производящими функциями $\nu_X(s)=(0{,}3+0{,}7s)$, и $\nu_Y(s)=0{,}25(1+s)^2$ соответственно. Найти распределение величины *Z* = *X* + *Y*.

<u>Решение</u>. Согласно свойства производящей функции распределения вероятностей для независимых случайных величин $\nu_Z(s)=\nu_X(s)\nu_Y(s)$. Отсюда получаем, что $\nu_Z(s)=(0{,}3+0{,}7s)0{,}25(1+s)^2=0{,}25(0{,}3+1{,}3s+1{,}7s^2+0{,}7s^3)$. Используя свойство функции производить вероятности, находим:

$$P\{X=0\}=\frac{1}{0!}\nu_X(0)=0{,}25(0{,}3+1{,}3s+1{,}7s^2+0{,}7s^3)\Big|_{s=0}=0{,}075\ ;$$

$$P\{X=1\}=\frac{1}{1!}\nu'_X(0)=0{,}25(1{,}3+2\times 1{,}7s+3\times 0{,}7s^2)\Big|_{s=0}=0{,}325\ ;$$

$$P\{X=2\}=\frac{1}{2!}\nu''_X(0)=0{,}25(2\times 1{,}7+2\times 3\times 0{,}7)\Big|_{s=0}=0{,}425\ ;$$

$$P\{X=3\}=\frac{1}{3!}\nu'''_X(0)=0{,}25\times 2\times 3\times 0{,}7\Big|_{s=0}=0{,}175\ .$$

Условие нормировки выполняется: $0{,}075+0{,}325+0{,}425+0{,}175=1$.

10. Случайная величина *X* задана производящей функцией вероятностей $\nu_X(s)=\dfrac{(1+s)^k}{\alpha}$ $(\alpha>1)$. Найти факториальные моменты величины *X*.

<u>Решение</u>. Производящая функция вероятностей позволяет находить факториальные моменты неотрицательной целочисленной случайной величины *X* по формуле $f_n[X]=\nu_X^{(n)}(1)$. Применим эту формулу для нашей задачи:

$$f_1[X]=\nu'_X(1)=\frac{k(1+s)^{k-1}}{\alpha}\Bigg|_{s=1}=\frac{k2^{k-1}}{\alpha};$$

$$f_2[X] = \nu''_X(1) = \left.\frac{k(k-1)(1+s)^{k-2}}{\alpha}\right|_{s=1} = \frac{k(k-1)2^{k-2}}{\alpha};$$

$$f_3[X] = \nu'''_X(1) = \left.\frac{k(k-1)(k-2)(1+s)^{k-3}}{\alpha}\right|_{s=1} = \frac{k(k-1)(k-2)2^{k-3}}{\alpha};$$

. . . .

$$f_n[X] = \nu^{(n)}_X(1) = \left.\frac{k(k-1)(k-2)...(k-n+1)(1+s)^{k-n+1}}{\alpha}\right|_{s=1} =$$

$$= \frac{k(k-1)(k-2)...(k-n+1)}{1} \times \frac{(k-n)...2\times 1}{(k-n)...2\times 1} \times \frac{2^{k-n+1}}{\alpha} = A_k^n \frac{2^{k-n+1}}{\alpha}, \quad n \le k.$$

Задачи для самостоятельной работы

10.1. Найти закон распределения, которому соответствует производящая функция $\nu_X(s) = 0{,}2 + 0{,}1s + 0{,}3s^2 + 0{,}2s^3 + 0{,}2s^4$.

10.2. Найти производящую функцию вероятностей случайной величины *Y*, имеющей распределение Пуассона с параметром λ.

10.3. Дискретная случайная величина *X* задана таблично:

X	1	4	10	12
P	0,5	0,1	0,3	0,1

Найти производящую функцию вероятностей и математическое ожидание величины *X*.

10.4. Законы распределения вероятностей независимых случайных величин *X* и *Y* заданы таблично:

X	1	2
P	0,2	0,8

Y	0	2
P	0,6	0,4

Найти производящие функции вероятностей *X* и *Y* и закон распределения величины $Z = X + Y$.

10.5. Вывести производящую функцию вероятностей суммы независимых случайных величин *X* и *Y*, имеющих геометрическое распределение с параметром *p*.

10.6. Неотрицательная целочисленная случайная величина *X* задана таблично:

X	1	2	4	7
P	0,4	0,3	0,2	0,1

Найти производящую функцию вероятностей и факториальные моменты случайной величины *X*.

10.7 Законы распределения вероятностей независимых случайных величин Y и Z заданы таблично:

Y	0	2
P	0,1	0,9

Z	0	1
P	0,2	0,8

Найти производящие функции вероятностей Y и Z и дисперсию величины $X = Y + Z$.

10.8. Найти производящую функцию вероятностей суммы трех независимых случайных величин, имеющих бернуллиевское распределение с параметром p, математическое ожидание и дисперсию новой случайной величины.

10.9. Найти законы распределения, которым соответствуют следующие производящие функции: $\nu_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$, $\nu_Y(s) = (0{,}25 + 0{,}75s)^n$.

10.10. Пусть X – неотрицательная целочисленная случайная величина с производящей функцией $\nu(s)$. Найти производящие функции величин $Y = X + 1$ и $Z = 2X$.

10.11. Найти производящую функцию вероятностей и факториальные моменты случайной величины, подчиняющейся закону распределения Паскаля с параметрами (n, p).

10.12. Найти производящую функцию вероятностей и дисперсию суммы трех независимых случайных величин, имеющих биномиальное распределение с параметрами (n, p), (m, p) и (k, p) соответственно.

10.13. Можно ли считать производящей функцией вероятностей функцию $f_X(s) = 0{,}2s + 0{,}2s^4 + 0{,}1s^6 + 0{,}5s^{10}$?

10.14. Случайная величина X задана производящей функцией $\nu_X(s) = 0{,}2s^2 + 0{,}2s^4 + 0{,}1s^7 + 0{,}5s^8$. Найти закон распределения вероятностей (в виде таблицы), математическое ожидание и дисперсию величины X.

10.15. Найти факториальные моменты случайной величины X, заданной производящей функцией вероятностей $\nu_X(s) = 0{,}1s + 0{,}2s^2 + 0{,}3s^3 + 0{,}2s^4 + 0{,}1s^5 + 0{,}1s^6$.

10.16. Назовем циклом последовательность испытаний Бернулли до первой неудачи включительно. Найти производящую функцию и распределение вероятностей общего числа успехов в n циклах.

10.17. При каких значениях параметров дробно-линейная функция $f(s) = \dfrac{a + bs}{c + ds}$ является производящей функцией вероятностей?

10.18. Независимые случайные величины X и Y заданы производящими функциями $\nu_X(s) = 0{,}5(1 - 0{,}5s)^{-1}$, $\nu_Y(s) = 0{,}6(1 - 0{,}4s)^{-1}$. Найти производящую функцию вероятностей величины $Z = X + Y$.

10.19. Независимые случайные величины Y и Z заданы производящими функциями $\nu_Y(s) = e^{s-1}$, $\nu_Z(s) = e^{0,5(s-1)}$. Найти математическое ожидание величины $X = Y + 2Z$.

10.20. Может ли функция $f(s) = e^{3(s-1)}$ быть производящей функций вероятностей? Если да, то найти распределение вероятностей, которому она соответствует.

10.21. Случайные величины X и Y заданы таблично:

X	0	1
P	0,5	0,5

X	0	1	2	3
P	0,125	0,25	0,5	0,125

Доказать, что не существует случайной величины Z, не зависящей от X и такой, что $X + Z = Y$.

11. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ МОМЕНТОВ

Основные понятия раздела

Бесконечный ряд однотипных моментов (если такой существует) предполагает существование соответствующей производящей функции точно так же, как это было с рядом вероятностей. Для НЦСВ таким требованиям удовлетворяет функция $f_X(s) = \nu_X(1+s)$, называемая *производящей функцией факториальных моментов* (ПФФМ) и позволяющая находить факториальные моменты: $f_m[X] = f_X^{(m)}(0)$, $m = 1, 2, \ldots$. В терминах математических ожиданий $f_X(s) = M[(1+s)^X]$.

По распределению вероятностей случайной величины X определяются также *производящая функция начальных моментов* (ПФНМ) $\alpha_X(s) = M[\exp(sX)]$ и *производящая функция центральных моментов* (ПФЦМ) $\mu_X(s) = M[\exp\{s(X - M[X])\}]$. Аргумент s – любое комплексное число, для которого приведенные интегралы (суммы) сходятся абсолютно.

Если для распределения вероятностей случайной величины X существует начальный момент соответствующего порядка, то его можно найти по формуле $\alpha_m[X] = \alpha_X^{(m)}(0)$. Аналогично $\mu_m[X] = \mu_X^{(m)}(0)$.

Производящие функции моментов (ПФНМ, ПФЦМ и ПФФМ) обладают рядом общих и важных в прикладном аспекте свойств. Главное из них может быть сформулировано следующим образом: производящая функция моментов суммы X независимых случайных величин $X_1,\ldots, X_n$ равна произведению соответствующих производящих функций слагаемых, т. е. $\varphi_X(s) = \varphi_{X_1}(s) \ldots \varphi_{X_n}(s)$. Здесь в качестве функций φ могут фигурировать ПФФМ, ПФНМ или ПФЦМ.

Задачи с решениями

1. Случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-1)^2}{2}\right\}$; $-\infty < x < \infty$. Найти производящую функцию начальных моментов.

Решение. По определению производящая функция начальных моментов определяется по формуле $\alpha_X(s) = M\left[e^{sX}\right]$. Используя свойство математического ожидания для функции от случайной величины, находим:

$$\alpha_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(sx)\, p_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(sx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-1)^2}{2}\right\} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{sx - \frac{(x-1)^2}{2}\right\} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{s + \frac{s^2}{2}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-s-1)^2}{2}\right\} dx.$$

Введя подстановку $(x - s - 1) = t$, сведем интеграл к табличному и получим производящую функцию начальных моментов заданной случайной величины:

$$\alpha_X(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{s + \frac{s^2}{2}\right\} \sqrt{2\pi} = \exp\left\{s + \frac{s^2}{2}\right\}.$$

2. Найти производящую функцию начальных моментов и начальные моменты двух первых порядков случайной величины *X*, имеющей распределение $P\{X=k\}=pq^k$; $p+q=1$; $k=0,1,2,\ldots$.

<u>Решение</u>. Воспользовавшись определением производящей функции начальных моментов, свойством математического ожидания для функции от случайной величины и зная предел суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, имеем:

$$\alpha_X(s)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{sk}pq^k = p\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^s q\right)^k = \frac{p}{1-qe^s}.$$

Известно, что если задана производящая функция начальных моментов некоторой случайной величины, то начальные моменты этой величины можно найти по формуле $\alpha_k[X]=\alpha_X^{(k)}(0)$. Применив эту формулу для нашего случая, получим начальные моменты двух первых порядков заданной случайной величины:

$$\alpha_1[X]=\alpha'_X(s)\big|_{s=0} = \left.\frac{pqe^s}{(1-qe^s)^2}\right|_{s=0} = \frac{q}{p};$$

$$\alpha_2[X]=\alpha''_X(s)\big|_{s=0} = \left.\frac{pqe^s(1+qe^s)}{(1-qe^s)^3}\right|_{s=0} = \frac{q^2+q}{p^2}.$$

3. Пусть случайная величина *X* имеет производящую функцию начальных моментов $\alpha_X(s)$. Найти производящие функции начальных моментов величин $Y = aX + b$ и $Z = –bX$, когда $a = 3$, $b = 2$.

<u>Решение</u>. Найдем производящую функцию начальных моментов линейного преобразования $Y = aX + b$, воспользовавшись ее определением в форме математического ожидания:

$$\alpha_Y(s)=M\left[e^{sY}\right]=M\left[e^{s(aX+b)}\right]=M\left[e^{saX+sb}\right]=M\left[e^{saX}e^{sb}\right]=M\left[e^{saX}\right]M\left[e^{sb}\right]=$$
$$=e^{sb}M\left[e^{(sa)X}\right]=e^{sb}\alpha_X(as).$$

Подставив вместо a и b соответствующие значения, окончательно получим: $\alpha_Y(s)=e^{2s}\alpha_X(3s)$; $\alpha_Z(s)=\alpha_X(-2s)$.

4. Найти производящую функцию центральных моментов случайной величины *X*, заданной рядом распределения:

X	0	1	3	7
P	0,4	0,3	0,2	0,1

<u>Решение</u>. Согласно определения, производящая функция центральных моментов случайной величины *X* находится по формуле $\mu_X(s)=M\left[e^{s(X-M[X])}\right]$, которую легко свести к следующему виду:

$$\mu_X(s)=e^{-sM[X]}M\left[e^{sX}\right]=\alpha_X(s)\cdot e^{-sM[X]}=\nu_X\left(e^s\right)\cdot e^{-sM[X]}. \qquad (*)$$

Найдем математическое ожидание $M[X]$ и производящую функцию вероятностей $\nu_X\left(e^s\right)$:

$$M[X]=0\times0{,}4+1\times0{,}3+3\times0{,}2+7\times0{,}1=1{,}6;$$

$$\nu_X\left(e^s\right)=\left(e^s\right)^0\times0{,}4+\left(e^s\right)^1\times0{,}3+\left(e^s\right)^3\times0{,}2+\left(e^s\right)^7\times0{,}1=0{,}4+0{,}3e^s+0{,}2e^{3s}+0{,}1e^{7s}.$$

Тогда производящая функция центральных моментов заданной случайной величины будет иметь следующий вид:

$$\mu_X(s) = e^{-1,6s}(0,4 + 0,3e^s + 0,2e^{3s} + 0,1e^{7s}) = 0,4e^{-1,6s} + 0,3e^{-0,6s} + 0,2e^{1,4s} + 0,1e^{5,4s}.$$

5. Найти производящую функцию центральных моментов и центральные моменты двух первых порядков случайной величины X, заданной плотностью распределения вероятностей

$$p_X(x) = \begin{cases} 0,25e^{-0,25x} & \text{при} \quad x \ge 0; \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

<u>Решение</u>. Для нахождения производящей функции центральных моментов воспользуемся формулой (*), полученной в задаче 4: $\mu_X(s) = \alpha_X(s)e^{-sM[X]}$. Определим математическое ожидание $M[X]$ и производящую функцию начальных моментов:

$$M[X] = \int_0^\infty x\,0,25e^{-0,25x}dx = 4;$$

$$\alpha_X(s) = \int_0^\infty e^{sx}0,25e^{-0,25x}dx = \frac{1}{1-4s}.$$

Отсюда имеем $\mu_X(s) = \dfrac{e^{-4s}}{1-4s}$.

Зная производящую функцию центральных моментов, найдем центральные моменты двух первых порядков по формуле $\mu_k[X] = \mu_X^{(k)}(0)$. Следовательно,

$$\mu_1[X] = \mu_X'(0) = \left.\frac{16se^{-4s}}{(1-4s)^2}\right|_{s=0} = 0;$$

$$\mu_2[X] = \mu_X''(0) = \left.\frac{16e^{-4s}(1+4s)}{(1-4s)^2}\right|_{s=0} = 16.$$

6. Найти производящую функцию центральных моментов величины $Z = X + Y$, если известно, что случайные величины X и Y независимы, X имеет производящую функцию центральных моментов

$$\mu_X(s) = 0,8\exp(-0,2s) + 0,2\exp(0,8s),$$

а Y задана рядом распределения:

Y	1	2
P	0,1	0,9

<u>Решение</u>. Для решения задачи воспользуемся свойством производящих функций центральных моментов для независимых случайных величин: $\mu_{X+Y}(s) = \mu_X(s)\mu_Y(s)$. Найдем $\mu_Y(s)$, используя формулу (*), полученную в задаче 4: $\mu_Y(s) = \alpha_Y(s)e^{-sM[Y]}$, и зная, что $\alpha_Y(s) = \nu_Y(e^s)$. Тогда

$$M[Y] = 1 \times 0,1 + 2 \times 0,9 = 1,9;$$

$$\alpha_Y(s) = 0,1 \cdot \left(e^s\right)^1 + 0,9 \cdot \left(e^s\right)^2 = 0,1 \cdot e^s + 0,9 \cdot e^{2s};$$

$$\mu_Y(s) = \left(0,1e^s + 0,9e^{2s}\right) \cdot e^{-1,9s}.$$

Перемножив производящие функции центральных моментов величин X и Y и выполнив простейшие преобразования, получим:

$$\mu_Z(s) = (0{,}8e^{-0{,}2s} + 0{,}2e^{0{,}8s}) \cdot (0{,}1e^{s} + 0{,}9e^{2s}) \cdot e^{-1{,}9s} = 0{,}02e^{-1{,}1s}(4 + e^{s}) \cdot (1 + 9e^{s}).$$

7. Случайная величина X задана производящей функцией вероятностей $\nu_X(s) = 0{,}5(1 - 0{,}5s)^{-1}$. Найти производящую функцию факториальных моментов и математическое ожидание величины X.

Решение. Известно, что $f_X(s) = \nu_X(1+s)$. Отсюда имеем

$$f_X(s) = 0{,}5(1 - 0{,}5(1+s))^{-1} = (1-s)^{-1}.$$

Для нахождения математического ожидания воспользуемся известными соотношениями: $M[X] = f_1[X]$, а $f_1[X] = f_X'(0)$. Следовательно,

$$M[X] = -(1-s)^2(-1)\Big|_{s=0} = 1.$$

8. Случайная величина X (число частиц, достигающих счетчика в некотором физическом опыте с радиоактивными частицами) распределена по следующему эмпирическому закону, заданному таблицей:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,021	0,081	0,156	0,201	0,195	0,151	0,097	0,054	0,026	0,011	0,007

Найти факториальные моменты двух первых порядков.

Решение. Для нахождения производящей функции факториальных моментов заданной величины X воспользуемся соотношением $f_X(s) = \nu_X(1+s)$. Отсюда

$$\begin{aligned} f_X(s) &= 0{,}021(1+s)^0 + 0{,}081(1+s)^1 + 0{,}156(1+s)^2 + 0{,}201(1+s)^3 + 0{,}195(1+s)^4 + \\ &+ 0{,}151(1+s)^5 + 0{,}097(1+s)^6 + 0{,}054(1+s)^7 + 0{,}026(1+s)^8 + 0{,}011(1+s)^9 + 0{,}007(1+s)^{10} = \\ &= 0{,}102 + 0{,}081s + 0{,}156(1+s)^2 + 0{,}201(1+s)^3 + 0{,}195(1+s)^4 + 0{,}151(1+s)^5 + \\ &+ 0{,}097(1+s)^6 + 0{,}054(1+s)^7 + 0{,}026(1+s)^8 + 0{,}011(1+s)^9 + 0{,}007(1+s)^{10}. \end{aligned}$$

Зная производящую функцию факториальных моментов, найдем факториальные моменты заданной случайной величины по формуле $f_k[X] = f_X^{(k)}(0)$:

$$\begin{aligned} f_1[X] &= 0{,}081 + 0{,}156 \times 2(1+s) + 0{,}201 \times 3(1+s)^2 + 0{,}195 \times 4(1+s)^3 + 0{,}151 \times 5(1+s)^4 + \\ &+ 0{,}097 \times 6(1+s)^5 + 0{,}054 \times 7(1+s)^6 + 0{,}026 \times 8(1+s)^7 + 0{,}011 \times 9(1+s)^8 + \\ &+ 0{,}007 \times 10(1+s)^9 \,|_{s=0} = 3{,}868; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2[X] &= 0{,}156 \times 2 + 0{,}201 \times 3 \times 2(1+s)^1 + 0{,}195 \times 4 \times 3(1+s)^2 + 0{,}151 \times 5 \times 4(1+s)^3 + \\ &+ 0{,}097 \times 6 \times 5(1+s)^4 + 0{,}054 \times 7 \times 6(1+s)^5 + +0{,}026 \times 8 \times 7(1+s)^6 + \\ &+ 0{,}011 \times 9 \times 8(1+s)^7 + 0{,}007 \times 10 \times 9(1+s)^8 \,|_{s=0} = 14{,}934. \end{aligned}$$

9. Найти производящую функцию факториальных моментов и факториальные моменты случайной величины X, заданной распределением Бернулли: $P\{X = k\} = p^k q^{1-k}$; $p + q = 1$; $k = 0,1$.

Решение. По определению производящая функция факториальных моментов есть $f_X(s) = M\left[(1+s)^X\right]$. Применив эту формулу для нашего случая, имеем:

$$f_X(s)=\sum_{k=0}^{1} p^k q^{1-k}(1+s)^k = p^0 q^1 (1+s)^0 + p^1 q^0 (1+s)^1 = 1+ps\,.$$

Найдем факториальные моменты бернуллиевской случайной величины по формуле $f_k[X]=f_X^{(k)}(0)$.

$f_1[X]=p$; $f_k[X]=0$, $k=2,3,\ldots$.

10. Законы распределения вероятностей независимых случайных величин *X*, *Y* и *Z* заданы таблично:

X	1	2
P	0,7	0,3

Y	0	2
P	0,5	0,5

Z	0	1
P	0,2	0,8

Найти производящую функцию факториальных моментов величины $Q = X + Y + Z$ и математическое ожидание величины *Q*.

<u>Решение</u>. Известно, что для независимых случайных величин $f_{X+Y+Z}(s)=f_X(s)\cdot f_Y(s)\cdot f_Z(s)$. Применив соотношение, связывающее производящую функцию факториальных моментов и производящую функцию вероятностей, получим:

$$f_Q(s)=\left[0{,}7(1+s)^1+0{,}3(1+s)^2\right]\times\left[0{,}5(1+s)^0+0{,}5(1+s)^2\right]\times\left[0{,}2(1+s)^0+0{,}8(1+s)^1\right]=$$
$$=1+3{,}1s+3{,}94s^2+2{,}63s^3+0{,}91s^4+0{,}12s^5.$$

Зная, что $M[Q]=f_1[Q]=f_Q'(0)$, найдем математическое ожидание величины *Q*:

$$M[Q]=3{,}1+3{,}94\times 2s^1+2{,}63\times 3s^2+0{,}91\times 4s^3+0{,}12\times 5s^4\Big|_{s=0}=3{,}1\,.$$

Задачи для самостоятельной работы

11.1. Независимые случайные величины *X* и *Y* заданы распределениями $P\{X=k\}=p^k q^{1-k}$, $p+q=1$, $k=0{,}1$; $P\{Y=k\}=pq^k$, $p+q=1$, $k=0{,}1{,}2,\ldots$. Найти производящую функцию начальных моментов и математическое ожидание величины $Z = X + Y$.

11.2. Случайные величины *X* и *Y* независимы и заданы плотностями

$$p_X(x)=\lambda e^{-\lambda x},\quad x\ge 0,\quad \lambda>0;\qquad p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\quad -\infty<y<\infty\,.$$

Найти производящую функцию центральных моментов и дисперсию величины $Z = X + Y$.

11.3. Найти производящие функции начальных и центральных моментов, а также начальные и центральные моменты величины *X*, имеющей бернуллиевское распределение с параметром *p*.

11.4. Случайная величина *X* задана распределением

$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}$; $p+q=1$; $n=1,2,...$; $k=\overline{0,n}$.

Найти производящие функции моментов.

11.5. Найти производящую функцию центральных моментов случайной величины *X* – числа независимых испытаний Бернулли, проводимых до первого «успеха» с вероятностью *p* в каждом испытании.

11.6. Случайные величины *X, Y* и *Z* независимы и распределены по геометрическому закону с параметрами p_1, p_2 и p_3 соответственно. Найти производящие функции моментов величины *Q = X + Y + Z*.

11.7. Случайная величина *X* распределена по закону Пуассона с параметром λ. Для величины *Y = 2X + 3* найти производящие функции моментов, математическое ожидание и дисперсию.

11.8. Случайная величина *X* распределена по закону Рэлея с плотностью распределения вероятностей $p_X(x)=2h^2xe^{-h^2x^2}$; $h>0$; $x>0$. Найти производящие функции начальных и центральных моментов.

11.9. Дискретная случайная величина *X* задана таблично:

X	1	4	10	12
P	0,5	0,1	0,3	0,1

Найти производящую функцию начальных моментов и начальные моменты (трех первых порядков) величины *X*.

11.10. Непрерывная случайная величина *X* распределена равномерно на интервале *[0,1]*. Найти производящие функции моментов величины *X*.

11.11. Пусть *X* – неотрицательная целочисленная случайная величина с производящей функцией вероятностей $\nu_X(s)$. Найти производящие функции факториальных моментов величин *Y = X + n* и *Z = nX* (*n* – целое неотрицательное число).

11.12. Случайные величины X_1, X_2, ... , X_n независимы и распределены по стандартному нормальному закону. Найти производящие функции моментов случайной величины $Z=X_1+X_2+...+X_n$.

11.13. Найти производящую функцию начальных моментов и начальные моменты случайной величины *X*, имеющей показательное распределение с параметром λ.

11.14. Случайная величина *X* имеет распределение

$$P_X(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x},\ \alpha>0,\ x>0.$$

Найти производящие функции моментов, математическое ожидание и дисперсию величины *X*.

11.15. Найти производящую функцию центральных моментов и центральные моменты нормальной случайной величины с параметрами *a* и σ.

11.16. Найти производящую функцию центральных моментов случайной величины $Y = 2X$, если величина X задана χ^2-распределением с параметром (числом степеней свободы) n.

11.17. Независимые случайные величины X и Y имеют бернуллиевское распределение с параметрами p_1 и p_2 соответственно. Найти производящую функцию начальных моментов величины $Z = X + Y$.

11.18. Независимые случайные величины X, Y и Z заданы таблично:

X	1	2
P	0,1	0,9

Y	0	2
P	0,6	0,4

Z	0	1
P	0,2	0,8

Найти производящую функцию центральных моментов и дисперсию величины $Q = X + Y + Z$.

11.19. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно на интервале $[a,b]$. Найти производящую функцию начальных моментов величины $Y = aX + b$.

11.20. Найти распределение случайной величины X, имеющей производящую функцию факториальных моментов $f_X(s) = 4/(4-s)$.

11.21. Независимые случайные величины X и Y заданы производящими функциями вероятностей $\nu_X(s) = 0{,}25 \cdot (1+s)^2$; $\nu_Y(s) = p \cdot (1-qs)^{-1}$. Найти производящие функции начальных и центральных моментов, а также математическое ожидание и дисперсию величины $Z = 3X + 5Y$.

12. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ И ДРУГИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Основные понятия раздела

Характеристической функцией (ХФ) случайной величины X с функцией распределения $F_X(\cdot)$ называется комплекснозначная функция, задаваемая формулой $h_X(s) = M[\exp(isX)]$ или, что эквивалентно, формулой $h_X(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(isx)\, dF_X(x)$.

В частности, если существует плотность распределения вероятностей, то ХФ есть преобразование Фурье $h_X(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(isx)\, p_X(x)\, dx$ плотности распределения $p_X(\cdot)$ с обратным преобразованием $p_X(x) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-isx) h_X(s)\, ds$, если ХФ суммируема на вещественной оси.

Основные свойства характеристических функций.

ХФ1. Для любой случайной величины X $h_X(0) = 1, \quad |h_X(s)| \le 1, \quad s \in R^1$.

ХФ2. Характеристическая функция равномерно непрерывна на числовой оси.

ХФ3. Характеристическая функция является положительно определенной.

ХФ4. Характеристическая функция является эрмитовой, т. е. имеет место равенство $\overline{h(-s)} = h(s)$.

ХФ5. Если $X_1,\ldots, X_n$ независимы, то $h_{X_1+\ldots+X_n}(s) = h_{X_1}(s) \ldots h_{X_n}(s)$.

ХФ6. Если $Y = aX + b$, где a и b – постоянные, то $h_Y(s) = \exp(ibs) h_X(as)$.

ХФ7. Функция $h_X^{\partial}(\cdot)$ – четная, а $h_X^{м}(\cdot)$ – нечетная. Характеристическая функция действительна тогда и только тогда, когда соответствующее распределение симметрично: $1 - F_X(-t+0) = F_X(t)$.

ХФ8. Если существует абсолютный момент $M[\,|X|^n\,] < \infty$, то существует n-я производная ХФ и $\alpha_k[X] = M[X^k] = i^{-k} h_X^{(k)}(0)$.

Для достаточно малых значений аргумента s главная ветвь логарифмической функции $\psi_X(s) = \ln(h_X(s))$ называется *ψ-функцией или производящей функцией семиинвариантов* (ПФС).

Если существует n-й абсолютный момент, то в окрестности $s = 0$ ПФС непрерывно дифференцируема до порядка n включительно, причем, с учетом разложения ПФС в ряд Маклорена, $\psi_k[X] = i^{-k}\psi_X^{(k)}(0), \quad k = \overline{1, n}$. Эта величина называется *семиинвариантом порядка k* (*кумулянтом порядка k*).

При сложении независимых случайных величин $Y = X_1 + \ldots + X_n$ производящие функции семиинвариантов складываются: $\psi_Y(s) = \psi_{X_1}(s) + \ldots + \psi_{X_n}(s)$, складываются также и семиинварианты одного порядка: $\psi_k[Y] = \psi_k[X_1] + \ldots + \psi_k[X_n]$.

Связь между семиинвариантами и моментами в общем виде громоздка. Исключение составляют моменты первых трех порядков:

$\psi_1[X] = M[X] = \alpha_1[X] = f_1[X]$,

$\psi_2[X] = \mu_2[X] = D[X]$,

$\psi_3[X] = \mu_3[X]$.

Отношения ψ_3/σ^3 и ψ_4/σ^4 получили название коэффициентов асимметрии и эксцесса.

Преобразованием Лапласа (односторонним) функции распределения вероятностей $F_X(t)$ (или случайной величины X) называется функция

$$L_X(s) = M[e^{-sx}] = \int_0^\infty e^{-st} dF_X(t) = \int_0^\infty e^{-st} p_X(t)\,dt,$$

определенная для $t \ge 0$, $\mathrm{Re}(s) \ge 0$ и аналитическая при $\mathrm{Re}(s) > 0$ ($\mathrm{Re}(s) = \lambda$, если $s = \lambda + i\nu$).

Если плотность распределения вероятностей $p_X(t)$ непрерывна, то $p_X(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} L_X(s)e^{st}ds$, где интеграл понимается в смысле главного значения.

Преобразование Лапласа представляется в виде математического ожидания и в виде ряда

$$L_X(s) = M[e^{-sX}] = M\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-sx)^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-s)^k}{k!}\alpha_k[X]$$

в круге $0 \le s < s_0$, в котором последний ряд сходится.

Основные свойства преобразования Лапласа.

ПЛ1. Если $X_1, ..., X_n$ – неотрицательные и независимые случайные величины, то их сумма Y имеет преобразование Лапласа $L_Y(s) = L_{X_1}(s) \ldots L_{X_n}(s)$.

ПЛ2. Если $Y = aX + b$, причем $a, b, X \ge 0$, то $L_Y(s) = \exp(-sb)L_X(as)$.

ПЛ3. Если k-й начальный момент существует, то $\alpha_k[X] = (-1)^{-k} \cdot L_X^{(k)}(0)$.

Задачи с решениями

1. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке *[0,2]*. Найти характеристическую функцию этой величины.

Решение. Известно, что если для некоторой случайной величины X существует плотность распределения вероятностей $p_X(s)$, то характеристическая функция этой величины может быть найдена как преобразование Фурье $h_X(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} p_X(x)dx$. Для нашего случая имеем

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad x \in [0,2]; \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [0,2], \end{cases}$$

тогда $h_X(s) = \displaystyle\int_0^2 e^{isx}\frac{1}{2}dx = \frac{e^{2is} - 1}{2is}$.

2. Случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей

$$p_X(x)=\begin{cases}0{,}4e^{-0{,}4x} & \text{при} \quad x\ge 0;\\ 0 & \text{при} \quad x<0.\end{cases}$$

Найти характеристическую функцию и начальные моменты двух первых порядков величины *X*.

Решение. Применив преобразование Фурье к заданным условиям, получим:

$$h_X(s)=\int_0^\infty e^{isx}0{,}4e^{-0{,}4x}dx=0{,}4\int_0^\infty e^{-(0{,}4-is)x}dx.$$

Введя подстановку $t=(0{,}4-is)x$, найдем выражение для характеристической функции заданной случайной величины:

$$h_X(s)=\frac{0{,}4}{0{,}4-is}.$$

Зная характеристическую функцию, найдем начальные моменты двух первых порядков по формуле $\alpha_k[X]=i^{-k}h_X^{(k)}(0)$:

$$\alpha_1[X]=i^{-1}h_X'(0)=0{,}4\left.\frac{0(0{,}4-is)+i}{i(0{,}4-is)^2}\right|_{s=0}=2{,}5;$$

$$\alpha_2[X]=i^{-2}h_X''(0)=0{,}4\left.\frac{0(0{,}4-is)^2+2i^2(0{,}4-is)}{i^2(0{,}4-is)^4}\right|_{s=0}=31{,}25.$$

3. Независимые случайные величины *X* и *Y* имеют характеристические функции $h_X(s)$ и $h_Y(s)$ соответственно. Найти характеристическую функцию величины $Q = U + V$, если $U = 2X + 3$ и $V = -Y$.

Решение. Используя определение $h_X(s)=M\left[e^{isX}\right]$ и свойство характеристической функции для независимых случайных величин $h_Q(s)=h_U(s)\cdot h_V(s)$, находим:

$$h_Q(s)=M\left[e^{isU}\right]\cdot M\left[e^{isV}\right]=M\left[e^{is(2X+3)}\right]\cdot M\left[e^{is(-Y)}\right]=e^{3is}\cdot M\left[e^{i(2s)X}\right]\cdot M\left[e^{i(-s)Y}\right]=$$
$$=e^{3is}h_X(2s)h_Y(-s).$$

4. Найти плотность распределения вероятностей, которой соответствует характеристическая функция $h_X(s)=1/(1+s^2)$.

Решение. Плотность распределения связана с характеристической функцией обратным преобразованием Фурье $p_X(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-isx}h_X(s)\,ds$. Применим его для нашего случая: $p_X(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-isx}\dfrac{1}{1+s^2}ds$.

Будем рассматривать *s* как вещественную часть комплексной переменной $t=s+iv$. При $x<0$ интеграл по вещественной оси равен интегралу по замкнутому контуру, состоящему из вещественной оси и полуокружности бесконечно большого радиуса, лежащей в верхней полуплоскости (рис. 12.1), т. е. $p_X(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{-isx}}{1+s^2}ds=\dfrac{1}{2\pi}\oint\dfrac{e^{-ist}}{1+t^2}dt$. На основании теоремы о вычетах

$$\frac{1}{2\pi}\oint\frac{e^{-ist}}{1+t^2}dt=2\pi i\left(\frac{e^{-ixt}}{2t}\right)_{t=i}=\pi e^{x}.$$

Отсюда, учитывая, что $x<0$, имеем: $p_X(s)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$.

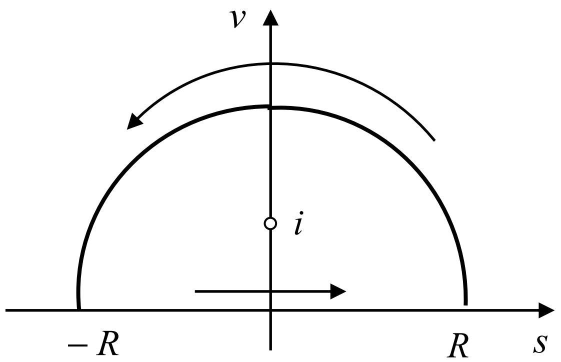


Рис. 12.1

Аналогичным образом при $x>0$ плотность $p_X(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-isx}}{1+s^2}ds=\frac{1}{2\pi}\oint\frac{e^{-ist}}{1+t^2}dt$, где интегрирование ведется по тому же контуру (см. рис. 12.1), и на основании теоремы о вычетах $\frac{1}{2\pi}\oint\frac{e^{-ist}}{1+t^2}dt=2\pi i\left(\frac{e^{ixt}}{2t}\right)_{t=i}=\pi e^{-x}$, а также учитывая, что $x>0$, имеем: $p_X(s)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$.

Таким образом, случайная величина *X* имеет распределение Лапласа с параметрами *(0,1)*.

5. Случайная величина *X* задана плотностью распределения вероятностей $p_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ на всей действительной оси. Найти производящую функцию семиинвариантов.

<u>Решение</u>. Для нахождения производящей функции семиинвариантов воспользуемся ее определением, задаваемым формулой $\psi_X(s)=\ln(h_X(s))$. Найдем характеристическую функцию заданной случайной величины, используя для вычисления интеграла рассуждения, приведенные в предыдущем примере:

$$h_X(s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{isx}\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{isx}}{1+x^2}dx=e^{-|s|}.$$

Тогда $\psi_X(s)=\ln e^{-|s|}=-|s|$.

6. Случайная величина *X* имеет характеристическую функцию $h_X(s)=\frac{1}{1-2is}$. Найти производящую функцию семиинвариантов, математическое ожидание, дисперсию, асимметрию и эксцесс величины *X*.

<u>Решение</u>. По определению $\psi_X(s)=\ln(1-2is)^{-1}=-\ln(1-2is)$. Для нахождения требуемых числовых характеристик воспользуемся свойством производящей

функции семиинвариантов: $\psi_k[X]=i^{-k}\psi_X^{(k)}(0)$, а также формулами связи кумулянтов и заданных числовых характеристик:

$$M[X]=\psi_1[X];\quad D[X]=\psi_2[X];\quad K_{AC}[X]=\frac{\psi_3[X]}{(\psi_2[X])^{3/2}};\quad K_{ЭК}=\frac{\psi_4[X]}{(\psi_2[X])^2}.$$

Отсюда имеем

$$M[X]=i^{-1}\psi_X^{(1)}(0)=-i^{-1}(1-2is)^{-1}(-2i)\Big|_{s=0}=\frac{2}{1-2is}\Big|_{s=0}=2;$$

$$D[X]=i^{-2}\psi_X^{(2)}(0)=-i^{-2}\frac{(-2i)^2}{(1-2is)^2}\Bigg|_{s=0}=4;$$

$$\psi_3[X]=i^{-3}\psi_X^{(3)}(0)=-i^{-3}\frac{8i}{(1-2is)^3}\Bigg|_{s=0}=8;$$

$$\psi_4[X]=i^{-4}\psi_X^{(4)}(0)=-i^{-4}\frac{16}{(1-2is)^4}\Bigg|_{s=0}=16;$$

$$K_{AC}[X]=1;\qquad K_{ЭК}[X]=1.$$

7. Независимые случайные величины *X*, *Y* и *Z* заданы производящими функциями семиинвариантов: $\psi_X(s)=\psi_Y(s)=\psi_Z(s)=2\ln(1-0{,}5is)$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины $Q = X + Y + Z$.

Решение. Зная свойство производящей функции кумулянтов для независимых случайных величин $\psi_Q(s)=\psi_{X+Y+Z}(s)=\psi_X(s)+\psi_Y(s)+\psi_Z(s)$, получим: $\psi_Q(s)=6\ln(1-0{,}5is)$. Отсюда находим математическое ожидание и дисперсию величины *Q*:

$$M[Q]=i^{-1}\psi_X^{(1)}(0)=-6i^{-1}(1-0{,}5is)^{-1}(-0{,}5i)\Big|_{s=0}=\frac{3}{1-0{,}5is}\Big|_{s=0}=3;$$

$$D[Q]=i^{-2}\psi_X^{(2)}(0)=-3i^{-2}\frac{(-0{,}5i)^2}{(1-2is)^2}\Bigg|_{s=0}=0{,}75.$$

8. Вывести двухстороннее преобразование Лапласа для случайной величины *X*, имеющей стандартное нормальное распределение.

Решение. Двухстороннее преобразование Лапласа в общем случае имеет вид $LL_X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-sx}p_X(x)dx$. Подставив в эту формулу плотность стандартного нормального распределения, находим:

$$LL_X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-sx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{(-x^2/2)}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(sx+\frac{x^2}{2})}dx=\frac{1}{2}e^{\frac{s^2}{2}}.$$

9. Найти односторонее (правостороннее) преобразование Лапласа величины $Z = X + Y$, если известно, что *X* и *Y* независимы и имеют следующие производящие функции начальных моментов: $\alpha_X(s)=(1-s)^{-2}$, $\alpha_Y(s)=(1-s)^{-3}$.

Решение. Известно, что одностороннее (правостороннее) преобразование Лапласа связано с производящей функцией начальных моментов соотношением

$L_X(s) = \alpha_X(-s)$. Зная свойство преобразования Лапласа для независимых случайных величин, имеем:

$$L_Z(s) = L_{X+Y}(s) = L_X(s)L_Y(s) = (1-(-s))^{-2}(1-(-s))^{-3} = (1+s)^{-5}.$$

10. Случайная величина X задана односторонним (правосторонним) преобразованием Лапласа $L_X(s) = \dfrac{1}{1+s}$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины X.

Решение. По свойству преобразования Лапласа $\alpha_k[X] = (-1)^{-k} L_X^{(k)}(0)$ находим

$$M[X] = \alpha_1[X] = (-1)^{-1}\left(-\frac{1}{(1+s)^2}\right)\Bigg|_{s=0} = 1;$$

$$D[X] = \alpha_2[X] - (\alpha_1[X])^2 = (-1)^{-2}\frac{2}{(1+s)^3}\Bigg|_{s=0} - 1^2 = 1.$$

Задачи для самостоятельной работы

12.1. Случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей $p_X(x) = 2h^2xe^{-h^2x^2}$; $h > 0$; $x > 0$. Найти ее характеристическую функцию.

12.2. Найти преобразование Лапласа и начальные моменты двух первых порядков случайной величины X, имеющей равномерное распределение на интервале $[2,4]$.

12.3. Величины X и Y независимы и одинаково распределены с преобразованием Лапласа $L_X(s) = L_Y(s) = f(s)$. Найти преобразование Лапласа величин $Z = X + Y$ и $T = X - Y$.

12.4. Найти преобразование Лапласа случайной величины X, заданной плотностью распределения вероятностей $p_X(x) = 0{,}3e^{-2x} + 0{,}7e^{-x}$, $x > 0$.

12.5. Найти характеристическую функцию и начальные моменты случайной величины, плотность распределения вероятностей которой имеет следующий вид:

$$p_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{при} \quad x \ge 0; \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

12.6. Случайная величина X имеет плотность распределения вероятностей

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1}e^{-\alpha x} & \text{при} \quad x \ge 0; \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Найти ее производящую функцию семиинвариантов, математическое ожидание и дисперсию.

12.7. Найти характеристическую функцию, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, плотность распределения вероятностей которой (закон арксинуса) имеет вид $p_X(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}$, $|x| < 1$.

12.8. Найти характеристическую функцию случайной величины *X*, распределенной по закону Коши $p_X(x) = \dfrac{a}{\pi(x^2 + a^2)}, \quad -\infty < x < \infty$.

12.9. Случайная величина *X* задана характеристической функцией $h_X(s) = e^{-(s\sigma)^2/2}$. Найти все центральные моменты этой величины.

12.10. Случайная величина *X* задана характеристической функцией $h_X(s) = e^{-a|s|}, \quad a > 0$. Определить плотность распределения вероятностей случайной величины *X*.

12.11. Является ли характеристической функцией распределения вероятностей функция $h_X(s) = (\cos(s))^2$?

12.12. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X*, характеристическая функция которой имеет вид $h_X(s) = \dfrac{1}{as}\sin(as), \quad a \neq 0$.

12.13. Найти производящую функцию семиинвариантов, математическое ожидание и дисперсию, асимметрию и эксцесс случайной величины *X*, заданной характеристической функцией $h_X(s) = \dfrac{e^{is} - 1}{is}$.

12.14. Независимые случайные величины *X* и *Y* заданы характеристическими функциями $h_X(s) = \exp\left(ias - \dfrac{s^2}{2}\right)$; $h_Y(s) = \exp\left(is - \dfrac{s^2\sigma^2}{2}\right)$. Найти распределение величины *Z* = *X* + *Y*.

12.15. Для случайной величины, заданной плотностью распределения вероятностей $p_X(x) = \dfrac{\lambda^3}{2} x^2 e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0, \quad x \geq 0$, найти производящую функцию семиинвариантов.

12.16. Найти производящую функцию семиинвариантов, математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X*, заданной распределением Максвелла $p_X(x) = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{x^2}, \quad x \geq 0$.

12.17. Найти правостороннее преобразование Лапласа и начальные моменты случайной величины *X*, заданной функцией распределения вероятностей $F_X(x) = 1 - \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)$.

12.18. Найти плотность распределения вероятностей и правостороннее преобразование Лапласа случайной величины *X*, заданной характеристической функцией $h_X(s) = (1 - ibs)^{-2}, \quad b > 0$.

12.19. Независимые случайные величины *X*, *Y* и *Z* заданы производящими функциями семиинвариантов $\psi_X(s) = \psi_Y(s) = \psi_Z(s) = c\ln(1 + is)$; *c* – целое положительное число. Найти константу *c* и характеристическую функцию величины *Q* = *X* + *Y* + *Z*.

12.20. Найти коэффициенты асимметрии и эксцесса случайной величины X, заданной характеристической функцией $h_X(s) = (1 - 2is)^{-n/2}$, n – целое положительное число.

12.21. Случайные величины X и Y независимы и равномерно распределены на отрезке $[a,b]$. Найти характеристическую функцию величины $Z = X + Y$.

13. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Основные понятия и теоремы раздела

Последовательность случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называется *сходящейся по вероятности* к случайной величине ξ, если для любого $\varepsilon > 0$ имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\xi_n - \xi| \ge \varepsilon\} = 0$. Кратко такой вид сходимости записывается следующим образом: $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$.

Последовательность случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называется *сходящейся с вероятностью единица* (*почти наверное (п.н.)*, или *почти всюду (п.в.)*) к случайной величине ξ, если $P\{\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi\} = 1$. Краткие обозначения: $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$, $\xi_n \xrightarrow{п.в.} \xi$, $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi (P - \text{п.н.})$.

Последовательность случайных величин называется *сходящейся в среднем* порядка r к случайной величине ξ, если $\lim\limits_{n\to\infty} M\left[|\xi_n - \xi|^r\right] = 0, \quad r > 0$. Кратко такая сходимость записывается в следующем виде: $\xi_n \xrightarrow{r} \xi$. В том частном случае, когда $r = 2$, эту сходимость называют сходимостью в среднеквадратическом и обозначают так: $l.i.m. \xi_n = \xi$.

Последовательность случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называется *сходящейся* к случайной величине ξ *по распределению*, если $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ в каждой точке непрерывности функций распределения $F_n(x) = P\{\xi_n < x\}$, $F(x) = P\{\xi < x\}$. Сокращенно этот вид сходимости отображается следующим образом: $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$.

Связь между различными видами сходимости можно изобразить следующим образом:

$$\left(\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi\right) \Rightarrow \left(\xi_n \xrightarrow{P} \xi\right) \Rightarrow \left(\xi_n \xrightarrow{D} \xi\right); \quad \left(\xi_n \xrightarrow{r_1} \xi\right) \Rightarrow \left(\xi_n \xrightarrow{r_2} \xi\right) \Rightarrow \left(\xi_n \xrightarrow{P} \xi\right).$$

Здесь $r_1 > r_2$. Обратить двойные стрелки, вообще говоря, нельзя.

Неравенства Чебышева:

1) $P\{|X - M[X]| \ge \varepsilon\} \le \dfrac{D[X]}{\varepsilon^2}$;

2) для неотрицательной целочисленной случайной величины с конечным математическим ожиданием неравенство (иногда называется неравенством Маркова) имеет вид $P\{X \ge \varepsilon\} \le \dfrac{M[X]}{\varepsilon}$.

Теорема Чебышева ($\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – последовательность независимых случайных величин, имеющих дисперсии, ограниченные одной и той же постоянной): $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i - \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} M[\xi_i]\right| < \varepsilon\right\} = 1, \quad \varepsilon > 0$.

Задачи с решениями

1 (правило «трех сигм»). Используя неравенство Чебышева, оценить сверху вероятность того, что случайная величина X, имеющая математическое

ожидание *a* и среднеквадратическое отклонение σ, отклонится от *a* менее чем на 3σ.

Решение. Неравенство Чебышева дает

$$P\{|X-M[X]|\geq 3\sigma\}\leq \frac{D[X]}{(3\sigma)^2}=\frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2}=\frac{1}{9}.$$

Отсюда имеем $P\{|X-M[X]|<3\sigma\}\geq \frac{8}{9}$. Итак, любая случайная величина отходит от своего математического ожидания меньше, чем на 3σ, с вероятностью, не меньшей, чем *8/9*.

Примечание. Это – крайний, самый неблагоприятный случай. На практике для обычно встречающихся случайных величин эта вероятность гораздо ближе к единице. Например, для нормального закона она равна *0,997*; для равномерного распределения – единице; для показательного – *0,982*.

2. Задана последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, имеющих равномерное распределение соответственно на участках *[0,1], [0,2], ... [0,n]*. Будет ли иметь место сходимость этой последовательности к случайной величине *X* в среднем порядка *r = 1*?

Решение. Последовательность случайных величин называется сходящейся в среднем порядка *r* к случайной величине ξ, если

$$\lim_{n\to\infty} M\left[|\xi_n-\xi|^r\right]=0, \quad r>0.$$

В силу определения случайные величины $\xi_i\geq 0$, $i=\overline{1,n}$ и $\xi>0$. Тогда для $M\left[|\xi_n-\xi|\right]$ возможны два случая:

1) если $\xi_n\geq\xi$, то $M\left[|\xi_n-\xi|\right]=M[\xi_n-\xi]=M[\xi_n]-M[\xi]$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} M\left[|\xi_n-\xi|\right]=\lim_{n\to\infty} M[\xi_n-\xi]=\lim_{n\to\infty}\left(M[\xi_n]-M[\xi]\right)=\lim_{n\to\infty} M[\xi_n]-\lim_{n\to\infty} M[\xi]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}-\lim_{n\to\infty} M[\xi]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}-M[\xi]=\infty-M[\xi]=\infty.$$

2) если $\xi_n\leq\xi$, то $M\left[|\xi_n-\xi|\right]=M[\xi-\xi_n]=M[\xi]-M[\xi_n]$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} M\left[|\xi_n-\xi|\right]=\lim_{n\to\infty} M[\xi-\xi_n]=\lim_{n\to\infty}\left(M[\xi]-M[\xi_n]\right)=\lim_{n\to\infty} M[\xi]-\lim_{n\to\infty} M[\xi_n]=$$

$$=\lim_{n\to\infty} M[\xi]-\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}=M[\xi]-\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}=M[\xi]-\infty=-\infty.$$

Следовательно, если $M[\xi]$ – конечная величина, то сходимость последовательности в среднем порядка *r = 1* отсутствует.

3. Цех завода выпускает шарики для подшипников. За смену производится *n = 100000* шариков. Вероятность того, что один шарик окажется дефектным, равна *0,05*. Причины дефектов для отдельных шариков независимы. Продукция проходит контроль сразу после изготовления, причем дефектные шарики бракуются и ссыпаются в бункер, а небракованные отправляются в цех сборки. Определить, на какое количество шариков должен быть рассчитан бункер, чтобы с вероятностью *0,99* после смены он не оказался переполненным.

Решение. Число *X* бракованных шариков имеет биномиальное распределение. Так как *n* достаточно велико, то на основании центральной предельной теоремы распределение X можно считать приблизительно нормальным с математическим ожиданием $M[X]=np=100000\times 0{,}05=500$ и дисперсией $D[X]=npq=100000\times 0{,}05\times 0{,}95=475$.

Найдем такое значение x, для которого $P\{X<x\}=0{,}99$. Для этого воспользуемся таблицей функции распределения стандартной нормальной величины (таблицей функции Лапласа), т. е. $P\left\{\frac{X-M[X]}{\sqrt{D[X]}}<x\right\}=0{,}99$. Тогда $(x-500)/\sqrt{475}\approx 2{,}33$ и $x\approx 551$. Таким образом, бункер, рассчитанный примерно на *550* шариков, с вероятностью *0,99* за смену переполняться не будет.

4. Независимые случайные величины X_1, X_2, ... распределены одинаково по показательному закону с параметром λ. Найти закон распределения и числовые характеристики случайной величины $Z=\sum_{i=1}^{Y}X_i$, где случайная величина Y имеет геометрическое распределение с параметром p, начинающееся с *1*.

Решение. Известно, что сумма фиксированного числа n независимых случайных величин $T=X_1+X_2+...+X_n$ с одинаковым показательным распределением подчинена закону Эрланга с плотностью распределения с параметрами (n,λ): $p_T(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t},\quad t>0$.

Плотность случайной величины Z легко находится по формуле полной вероятности с гипотезами $P_n=P\{Y=n\}$:

$$p_Z(z)=\sum_{n=1}^{\infty}p_n(z)P_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda z}pq^{n-1}=p\lambda e^{-\lambda z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda qz)^k}{k!}=p\lambda e^{-\lambda z}e^{\lambda qz}=$$
$$=\lambda pe^{-(\lambda p)z},\quad z>0.$$

Таким образом, случайная величина Z также будет подчинена показательному закону распределения, но с параметром λp. Отсюда числовые характеристики: $M[Z]=\frac{1}{\lambda p}$, $D[Z]=\frac{1}{\lambda^2p^2}$.

5. Из *1000* изделий, отправляемых в сборочный цех, было подвергнуто обследованию *200*, отобранных случайным образом. Среди них оказалось *25* бракованных. Приняв долю бракованных изделий среди отобранных за вероятность изготовления бракованного изделия, оценить вероятность того, что во всей партии бракованных изделий окажется не более *15 %* и не менее *10 %*.

Решение. Определим вероятность изготовления бракованного изделия: $p=25/200=0{,}125$.

Наибольшее отклонение частоты появлений бракованных изделий от вероятности p по абсолютной величине равно $|m/n-p|=0{,}025$. Используя неравенство Чебышева, находим:

$$P\{|m/n-p|\le 0{,}025\}>1-(0{,}125\times 0{,}875)/(1000\times 0{,}025^2)=0{,}825.$$

6. Средний расход воды в населенном пункте составляет *50000 л* в день. Оценить вероятность того, что в этом населенном пункте в данный день расход воды не превысит *150000 л*.

Решение. Применив для решения задачи неравенство Чебышева в форме $P\{X \le \varepsilon\} < 1 - \frac{M[X]}{\varepsilon}$, получим: $P\{X \le 150000\} < 1 - \frac{50000}{150000} = \frac{2}{3}$.

7. Математическое ожидание скорости ветра на данной высоте равно *25 км/ч*, а среднеквадратическое отклонение *4,5 км/ч*. Какие скорости ветра можно ожидать на этой высоте с вероятностью, не меньшей *0,9*?

Решение. Обозначив через *X* скорость ветра, запишем неравенство Чебышева: $P\{\,|\,X - 25\,| \le \varepsilon\} \ge 1 - \frac{4{,}5^2}{\varepsilon^2} > 0{,}9$. Отсюда $\varepsilon > 14{,}2$ *км/ч* и, следовательно, с вероятностью, большей *0,9*, имеем $10{,}8 \le X \le 39{,}2$.

8. Среднеквадратическое отклонение ошибки измерения азимута равно *30'*, а математическое ожидание равно нулю. Оценить вероятность того, что ошибка среднего арифметического трех независимых измерений не превзойдет 1^o.

Решение. Пусть X_1, X_2 и X_3 – ошибки трех наблюдений, тогда ошибка среднего арифметического этих наблюдений $X = (X_1 + X_2 + X_3)/3$ имеет дисперсию $D[X] = \frac{D[X_1] + D[X_2] + D[X_3]}{9} = 300$.

Оценим искомую вероятность, используя неравенство Чебышева:

$$P\{\,|\,X\,| \le 60\} \ge 1 - \frac{300}{60^2} \approx 0{,}917 .$$

9. Случайная величина *X* имеет математическое ожидание *M[X]=1* и среднеквадратическое отклонение $\sigma = 0{,}2$. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность неравенства $0{,}5 < X < 1{,}5$.

Решение. Перепишем заданное неравенство, прибавив к каждой его части *–1*: $-0{,}5 < X - 1 < 0{,}5$ или $|X - 1| < 0{,}5$. Оценим искомую вероятность, используя неравенство Чебышева: $P\{\,|X - 1| < 0{,}5\} \ge 1 - \frac{0{,}2^2}{0{,}5^2} = 0{,}16$.

10. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$, распределенных по нормальному закону с параметрами $(0, \sigma_i^2)$. Найти предельный закон распределения суммы этих величин при $n \to \infty$, если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2$ сходится.

Решение. Введем обозначения: $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \sigma^2$ и $Y = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i$. Известно, что характеристическая функция нормально распределенной случайной величины имеет вид $h_{\xi_i}(s)=\exp\left\{-\frac{\sigma_i^2 s^2}{2}\right\}$ и $h_Y(s)=\prod_{i=1}^{n} h_{\xi_i}(s)=\exp\left\{-\frac{s^2}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i^2\right\}$. Отсюда имеем $\lim_{n\to\infty}\exp\left\{-\frac{s^2}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i^2\right\}=\exp\left\{-\frac{\sigma^2 s^2}{2}\right\}$.

Задачи для самостоятельной работы

13.1. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$. Случайная величина ξ_n $(n=1,2,\dots)$ может принимать только три значения: $-\sqrt{n}, 0, \sqrt{n}$ с вероятностями, равными соответственно $1/n, 1-2/n, 1/n$. Применима ли к данной последовательности теорема Чебышева?

13.2. Последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ задана законом распределения:

ξ_n	a	$-a$
P	$n/(2n+1)$	$(n+1)/(2n+1)$

Применима ли к исходной последовательности теорема Чебышева?

13.3. Доказать, что из сходимости в среднем любого порядка следует сходимость по вероятности.

13.4. Используя неравенство Чебышева, найти вероятность того, что относительная частота появления герба при ста бросаниях монеты отклонится от вероятности не более чем на *0,1*.

13.5. Производится большое число n независимых опытов, в каждом из которых случайная величина X имеет равномерное распределение на участке *[0,2]*. На основе закона больших чисел выяснить, к какому числу a будет приближаться (сходиться по вероятности) при $n\to\infty$ величина $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. Оценить ошибку равенства $Y\approx a$.

13.6. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ распределены равномерно на участках *[–1,1], [–2,2], … , [–n,n]*. Будет ли среднее арифметическое этих величин при увеличении n сходиться по вероятности к *0*?

13.7. Длина изготовляемых изделий представляет случайную величину, математическое ожидание которой равно *90 см*. Дисперсия этой величины равна *0,0225*. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что: а) отклонение длины изготовленного изделия от ее математического ожидания по абсолютной величине не превзойдет *0,4*; б) длина изделия выразится числом, заключенным между *89,7* и *90,3 см*.

13.8. Вычислительная машина вырабатывает двоичные числа так, что знаки *0* и *1* на каждой позиции появляются с одинаковой вероятностью и независимо от других позиций. Последовательность знаков делится на группы, состоящие из одинаковых знаков, например: *000 111 0 1 00 1111 00 11 0000 1 0 …* . Подсчитывается число знаков в каждой группе и делится на число групп. Как будет вести себя средняя величина при неограниченном увеличении числа групп *n*?

13.9. Устройство состоит из *10* независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время *t* равна *0,05*. Оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и математическим ожиданием отказов за время *t* окажется меньше двух.

13.10. В очереди на получение денег в кассу стоит *n = 60* человек; размер выплаты каждому из них случаен. Средняя выплата *M[X] = 50 у. е.*, среднеквадратическое отклонение выплаты *σ[X] = 20 у. е.* Выплаты отдельным получателям независимы. Сколько должно быть денег в кассе, чтобы их с вероятностью *0,95* хватило на выплату всем *60* получателям? Каков будет гарантированный с той же вероятностью *0,95* остаток денег *b* в кассе после выплаты всем *60* получателям, если в начале выплаты в кассе было *3500 у. е.*?

13.11. Вероятность появления события *A* в одном опыте равна *0,5*. Можно ли с вероятностью, большей *0,97*, утверждать, что число появлений события *A* в *1000* независимых опытах будет в пределах от *400* до *600*?

13.12. Определить, имеет ли место закон больших чисел для среднего арифметического из *n* попарно независимых случайных величин X_k, заданных рядом распределения:

X_k	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$
P_k	0,25	0,5	0,25

13.13. Доказать, что к среднему арифметическому последовательности независимых случайных величин X_k, заданных рядом распределения:

X_k	$\sqrt{\ln k}$	$-\sqrt{\ln k}$
P_k	0,5	0,5

применим закон больших чисел.

13.14. Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения:

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

Оценить вероятность того, что $|X - M[X]| < 0{,}2$.

13.15. Задана последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – независимых одинаково распределенных случайных величин с плотностью $p_X(x)$; *Y* – положительная, не зависящая от них целочисленная случайная величина с законом распределения $P\{Y = n\} = p_n$; $n = \overline{1, N}$. Найти закон распределения и числовые характеристики случайной величины $Z = \sum_{i=1}^{Y} \xi_i$.

13.16. Среднее значение скорости ветра у земли в данном пункте равно *16 км/ч*. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что в этом пункте скорость ветра (при одном наблюдении) не превысит *80 км/ч*.

13.17. Известно, что при контроле бракуется *10 %* шестерен. Для контроля отобрано *500* деталей. Найти вероятность того, что число годных шестерен окажется в пределах от *460* до *475*.

13.18. Математическое ожидание количества выпадающих в течение года в данной местности осадков составляет *55 см*. Оценить вероятность того, что в этой местности осадков выпадет *175 см*.

13.19. Число солнечных дней в году для данной местности является случайной величиной с математическим ожиданием, равным *75* дням. Оценить вероятность того, что в течение года в этой местности будет не более *200* солнечных дней.

13.20. Дисперсия каждой из *2500* независимых случайных величин не превосходит *5*. Оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих случайных величин от их математических ожиданий не превзойдет *0,4*.

13.21. Дана последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$; $M[X_n]=0$; $D[X_n]=n^{\alpha}$; $\alpha<1$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел?

ОТВЕТЫ

Раздел 1

1.1. $A\cup B=\{\omega:1,2,4,6\}$; $A\cap B=\{\omega:2\}$; $A\setminus B=\{\omega:4,6\}$;
$\overline{A}=\{\omega:1,3,5\}$; $\overline{B}=\{\omega:3,4,5,6\}$.

1.3. **а)** ABC; **б)** $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$; **в)** $AB\cup AC\cup BC$.

1.4. $A\cup B\cup C=A+B\overline{A}+C\overline{A}\overline{B}$.

1.7. $C=AB\cup\overline{A}D$, где D – произвольное событие.

1.17. $B=A_6$, $C=A_1$, $D=A_2\setminus A_1$.

1.26. *Ω={(abc|---|---), (---|abc|---), (---|---|abc), (ab| c|---), (a c| b |---),
(bc|a |---), (ab |---| c), (a c|---| b), (bc|---|a), (a | bc|---),
(b |a c|---), (c|ab |---), (a |---| bc), (b |---|a c), (c|---|ab),
(---|ab | c), (---|a c| b), (---| bc|a), (---|a | bc), (---| b |a c),
(---| c|ab), (a | b | c), (a | c| b), (b |a | c), (b | c|a),
(c|a | b), (c| bc|a)}.*

1.27. *Ω={(●●●●|----|----|----), (----|●●●●|----|----), (----|----|●●●●|----),
(----|----|----|●●●●),
(●●● | ●|----|----), (●●● |----| ●|----), (●●● |----|----| ●),
(----|●●● | ●|----), (----|●●● |----| ●), (----|----|●●● |●),
(●● | ●●|----|---), (●● |----| ●●|----), (----|●● |---| ●●),
(----|----|●● | ●●), (●● |----|----| ●●), (----|●● | ●●|---),
(● | ●●●|----|----), (● |----| ●●●|----), (● |----|----| ●●●),
(----|● | ●●●|---), (----|● |----| ●●●), (----|----|● | ●●●),
(● | ●● | ●|----), (● | ●● |----| ●), (● |----| ●● | ●),
(----|● | ●● | ●), (● | ●| ●● |---), (● | ●|----| ●●),
(● |----| ●| ●●), (----|● | ●| ●●), (●● |● | ●|----),
(●● |● |----| ●), (●● |----|● | ●), (----| ●● |● | ●),
(● |● |● |●).*

1.28. *Ω={abcacbacbacb…, bcabcabcabca…,
aa, acc, acbb, acbaa, acbacc, acbacbb, acbacbaa, … ,
bb, bcc, bcaa, bcabb, bcabcc, bcabcaa, bcabcabb, … }.*

Раздел 2

2.2. **а)** *5/8*; **б)** *11/36*; **в)** *1/18*; **г)** *1/12*; **д)** *5/36*.

2.3. **а)** $1/A_6^3=1/120$; **б)** *0*.

2.4. **а)** *1/5*; **б)** *1/5*; **в)** *1/30*.

2.5. $\dfrac{C_{10}^4\cdot 2^4}{C_{20}^4}\approx 0{,}6936$.

2.6. **а)** *0,008*; **б)** *0,096*; **в)** *0,384*; **г)** *0,512*.

2.7. *0,2*.

2.9. $\dfrac{C_{99}^{9}}{C_{100}^{10}}=0{,}1$.

2.12. $\dfrac{25!}{\left((5!)^5\right)\cdot 5^{25}}$.

2.17. $1-C_{21}^{5}/C_{28}^{5}\approx 0{,}207$.

2.23. $\dfrac{A_{10}^{4}}{10^4-1}\approx 0{,}504$.

2.24. *0,9*.

Раздел 3

3.1. *0,424*.

3.6. *0,2421*.

3.7. а) *0,243*; **б)** *0,5*.

3.8. а) *0.94*; **б)** *0,56*; **в)** *0,06*.

3.9. $(0{,}01)^3$.

3.10. *0,001*.

3.11. *0,664*.

3.12. *5/18*.

3.13. *0,72*.

3.14. *1/5! = 1/120*.

3.23. *13*.

Раздел 4

4.1. *13/30*.

4.3. *83 %*.

4.4. *0,52*.

4.5. *2/3*.

4.6. а) *0,0345*; **б)** *140/345*.

4.10. *0,82*.

4.11. $\dfrac{\alpha(1-\gamma)}{\alpha(1-\gamma)+\gamma(1-\beta)}$.

4.13. *2/9*.

4.14. *0,225*.

4.15. *0,78*.

4.17. *0,089*.

4.18. *0,58*.

4.20. а) *0,75*; **б)** *0,5*.

4.22. $\dfrac{2a}{1+a-b}$.

4.23. *103/153*.

4.25. *1*.

Раздел 5

5.2. *M[X]=0,2n*; *D[X]=0,16n*.

5.4. **а)** *M[X]=3,868*; *D[X]*$\approx$*3,841*; **б)** *0,541*.

5.7. $\alpha_1[X]=4{,}8$; $\alpha_2[X]=26{,}4$; $\alpha[X]=158{,}4$; $\alpha_4[X]=1008$; $\mu_1[X]=0$; $\mu_2[X]=3{,}36$; $\mu_3[X]=0{,}576$; $\mu_4[X]=23{,}73$.

5.9. *M[X]=6*; *σ[X]*$\approx$*2,1*.

5.11. *M[X]*$\approx$*1,24*.

5.14. *M[Z]=1,2*; *M[Y]=0*.

5.17. *1,4*.

5.18. *6,7*.

Раздел 6

6.1. $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ 1-\dfrac{1}{x^3}, & x\ge 1;\end{cases}$ *M[X]=1,5*; *D[X]=0,75*.

6.3. **а)** $p_X(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}},\quad x\in[-2,2]$; **б)** *0,07*; **в)** *M[X]=0*; *D[X]=2π*.

6.6. *M[X]=a*; *D[X]=*$\dfrac{b^2}{3}$.

6.7. *1/λ*.

6.8. *M[X]=1,5a*; *D[X]=0,75*a^2.

6.15. *M[Y]=0,325*.

6.17. $p_X(x)=\dfrac{1}{6},\ x\in[1,7]$.

6.25. $M[X]=M_o[X]=M_e[X]=2$; $D[X]=2/3$; $A_s[X]=0$; $E_k[X]=-0{,}6$.

Раздел 7

7.1. $p_\xi(x,y,z)=abce^{-(ax+by+cz)},\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.

7.2. $a^{-3}-a^{-6}-a^{-9}+a^{-12}$.

7.4. $\dfrac{\pi R^2}{4ab}$.

7.5. $\alpha_{1,0}[\xi]=0{,}55$; $\alpha_{0,1}[\xi]=0{,}1$; $\mu_{2,0}[\xi]=2475$; $\mu_{0,2}[\xi]=0{,}59$; $\mu_{1,1}[\xi]=-0{,}055$.

7.7. *M[X]=3*; *D[X]=4,26*.

7.11. $c=\dfrac{3}{\pi R^3}$; $p=\dfrac{3a^2}{R^2\left(1-\dfrac{2a}{3R}\right)}$.

7.12. а) $p_\xi(x,y)=\cos x\cos y$; **б)** $M[X]=M[Y]=\dfrac{\pi}{2}-1$; **в)** $\|R\|=\begin{pmatrix}\pi-3 & 0\\ 0 & \pi-3\end{pmatrix}$.

7.15. $\|r\|=\begin{pmatrix}1 & -0{,}5 & 0{,}5\\ -0{,}5 & 1 & -0{,}5\\ 0{,}5 & -0{,}5 & 1\end{pmatrix}$.

7.16. *M[X]=M[Y]=0*; $\|R\|=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0\\ 0 & 0{,}5\end{pmatrix}$.

7.17. а) *1,39*; **б)** $\|R\|=\begin{pmatrix}0{,}132 & -0{,}026\\ -0{,}026 & 0{,}132\end{pmatrix}$.

7.18. $p_\xi(2{,}2)=\dfrac{1}{2\pi e^3\sqrt{2}}\approx 0{,}0056$.

7.21. *A=20*; $F_X(x)=\dfrac{1}{\pi}arctg\,\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}$; $F_Y(y)=\dfrac{1}{\pi}arctg\,\dfrac{y}{5}+\dfrac{1}{2}$.

7.22. $1-e^{-\frac{k^2}{2}}$.

Раздел 8

8.10. а) $r[X,Y]=\begin{cases}+1, & \dfrac{n}{m}<0;\\ -1, & \dfrac{n}{m}>0;\end{cases}$ **б)** $\dfrac{\sigma[X]}{\sigma[Y]}=\left|\dfrac{n}{m}\right|$.

8.11. а) $p_{X|Y}(x,y)=\dfrac{1}{0{,}6\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+0{,}4y-4{,}2)^2}{0{,}72\sigma^2}}$; $p_{Y|X}(x,y)=\dfrac{1}{01{,}2\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y+1{,}6x-62)^2}{2{,}88\sigma^2}}$;

б) $M[X\mid Y=y]=4{,}2-0{,}4y$; $M[Y\mid X=x]=6-1{,}6x$.

8.13. $e^{-2}-e^{-4{,}5}\approx 0{,}1242$.

8.14. $p_X(x)=\dfrac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}$, $\quad F_X(x)=\dfrac{1}{\pi}\left(\arcsin\dfrac{x}{R}+\dfrac{x}{R}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{R^2}}\right)+\dfrac{1}{2}$, $\quad |x|\le R$;

$p_Y(y)=\dfrac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}$, $\quad F_Y(y)=\dfrac{1}{\pi}\left(\arcsin\dfrac{y}{R}+\dfrac{y}{R}\sqrt{1-\dfrac{y^2}{R^2}}\right)+\dfrac{1}{2}$, $\quad |y|\le R$.

Величины *X* и *Y* зависимы.

8.15. $p_\xi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}, & \textit{внутри квадрата};\\ 0, & \textit{вне квадрата};\end{cases}$

Внутри квадрата: $p_X(x)=\dfrac{a\sqrt{2}-2|x|}{a^2}$, $p_Y(y)=\dfrac{a\sqrt{2}-2|y|}{a^2}$.

Случайные величины *X* и *Y* зависимы, но не коррелированы.

8.16. $p_Z(z)=\dfrac{3\left(R^2-z^2\right)}{4R^3}$, $|z|<R$; $p_{(X,Y)|Z}=\dfrac{1}{\pi\left(R^2-z^2\right)}$, $|z|<R$.

8.17. $M[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}M[X\mid Y=y_0]p_Y(y)dy$;

$$D[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}D[X\mid Y=y_0]p_Y(y)dy+\int\limits_{-\infty}^{\infty}(M[X]-M[X\mid Y=y_0])^2\,p_Y(y)dy.$$

8.18. $p_{X|Y=0}(x)=\dfrac{1}{32\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-149)^2}{2048}}$; $p_{Y|X=25}(x)=\dfrac{1}{24\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y+75)^2}{1152}}$.

8.19. $p_{X|Y}(x,y)=\dfrac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi\left(1-r^2\right)}}e^{-\frac{\left[x-a_1-r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-a_2)\right]^2}{2\left(1-r^2\right)\sigma_1^2}}$; $p_{Y|X}(x,y)=\dfrac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi\left(1-r^2\right)}}e^{-\frac{\left[y-a_2-r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-a_1)\right]^2}{2\left(1-r^2\right)\sigma_2^2}}$.

Раздел 9

9.3. *M[X+Y]=1760*; *D[X+Y]=3500*.

9.6.

Y	$\sqrt{2}/2$	*1*
P	*0,3*	*0,7*

; *D[Y]≈0,018*.

9.7. а) $p_Y(y)=\dfrac{1}{3\pi\left[1+(1-y)^{3/2}\right]\cdot(1-y)^{2/3}}$;

б) $p_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi(1+z)\sqrt{z}} & при\quad z\ge 0;\\ 0 & при\quad z<0;\end{cases}$

в) $p_Q(q)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & при\quad |y|\le\dfrac{\pi}{2};\\ 0 & при\quad |y|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$.

9.12. $p_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}$, $y\ge 0$.

9.20. Модуль радиуса-вектора $R=\sqrt{x^2+y^2}$ имеет распределение Рэлея: $p_R(r)=\dfrac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$, $r>0$.

Раздел 10

10.3. $\nu_X(s)=0{,}5s+0{,}1s^4+0{,}3s^{10}+0{,}1s^{12}$; *M[X]=5,1*.

10.7. $\nu_Y(s)=0{,}1+0{,}9s^2$; $\nu_Z(s)=0{,}2+0{,}8s$; *D[X]=0,52*.

10.13. Да.

10.14.

X	2	4	7	8
P	*0,2*	*0,2*	*0,1*	*0,5*

; *M[X]=5,9*; *D[Y]=6,09*.

10.17. $0\le\dfrac{a}{c}\le 1$; $-1<\dfrac{d}{c}\le 0$; $\dfrac{b}{c}=1-\dfrac{a}{c}+\dfrac{d}{c}$.

10.19. *2*.

Раздел 11

11.1. $\alpha_Z(s) = \dfrac{p(q + pe^s)}{1 - qe^s}, \quad q + p = 1;\ M[Z] = p + \dfrac{q}{p}$.

11.2. $\mu_Z(s) = \dfrac{\lambda}{\lambda - s} e^{\left(\frac{s^2}{2} - \frac{s}{\lambda}\right)};\ D[X] = 1 + \dfrac{1}{\lambda^2}$.

11.9. $\alpha_X(s) = 0{,}5e^s + 0{,}1e^{4s} + 0{,}3e^{10s} + 0{,}1e^{12s};\ \alpha_1[X] = 5{,}1;\ \alpha_2[X] = 46{,}5$.

11.13. $\alpha_X(s) = \dfrac{\lambda}{\lambda - s}; \quad \alpha_k[X] = \dfrac{k!}{\lambda_k}$.

Раздел 12

12.8. $h_X(s) = e^{-a|s|}$.

12.10. $p_X(x) = \dfrac{a}{\pi(x^2 + a^2)}, -\infty < x < \infty$.

12.19. $h_Q(s) = (1 + is)^{3c}$, c – любое целое положительное число.

12.20. $A_c[X] = \sqrt{\dfrac{8}{n}};\ E_k[X] = \dfrac{12}{n}$.

Раздел 13

13.1. Применима: $M[X_n] = 0$, $D[X_n] = 2$.

13.2. Применима: $M[X_n] = -n/(2n+1)$, дисперсии равномерно ограничены числом a^2.

13.6. Нет.

13.7. а) $P \geq 0{,}86$; **б)** $P \geq 0{,}75$.

13.8. При $n \to \infty$ средняя величина сходится по вероятности к $M[Y_n] = 2$.

13.9. $P \geq 0{,}88$.

13.10. *≈3256 у.е.; 244 у.е.*

13.14. $P \geq 0{,}64$.

ТАБЛИЦЫ

Определенные интегралы

1. $\int\limits_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{1}{a}; \quad a > 0$.

2. $\int\limits_0^\infty xe^{-ax}dx = \frac{1}{a^2}; \quad a > 0$.

3. $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-ax}dx = \frac{2}{a^3}; \quad a > 0$.

4. $\int\limits_0^\infty \sqrt{x}e^{-ax}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}}; \quad a > 0$.

5. $\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-ax}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}; \quad a > 0$.

6. $\int\limits_0^\infty x^{k-\frac{1}{2}}e^{-ax}dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5 ... (2k-1)\sqrt{\pi}}{2^k a^{k+0,5}}; \quad a > 0; \quad k = 1, 2, ...$.

7. $\int\limits_0^\infty x^n e^{-ax}dx = \frac{n!}{a^{n+1}}; \quad a > 0; \quad n = 1, 2, ...$.

8. $\int\limits_0^\infty e^{-r^2 x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r}; \quad r > 0$.

9. $\int\limits_0^\infty x e^{-r^2 x^2}dx = \frac{1}{2r^2}; \quad r > 0$.

10. $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-r^2 x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4r^3}; \quad r > 0$.

11. $\int\limits_0^\infty x^{2a+1} e^{-r^2 x^2}dx = \frac{a!}{2r^{2a+2}}; \quad r > 0; \quad a = 1, 2, ...$.

12. $\int\limits_0^\infty x^{2a} e^{-r^2 x^2}dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2a-1)\sqrt{\pi}}{2^{a+1} r^{2a+1}}; \quad r > 0; \quad a = 1, 2, ...$

Функция нормального распределения

$$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}dx;\quad \Phi(t)+\Phi(-t)=1$$

t	*.00*	*.01*	*.02*	*.03*	*.04*	*.05*	*.06*	*.07*	*.08*	*.09*
0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997	.9997
3.6	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998	.9998	.9998
3.7	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.9	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
4.0	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
4.5	.999994									
5.0	.99999994									

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ И ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агапов Г. И. Задачник по теории вероятностей : учеб. пособие для студентов втузов / Г. И. Агапов. – Москва : Высш. шк., 1986. – 80 с.

2. Борзых Д. А. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах: более 360 задач и упражнений / Д. А. Борзых. – Москва : Изд. группа URSS, 2020. – 235 с.

3. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – Москва : Эдиториал УРСС, 2001. – 269 с.

4. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для бакалавров ; рек. М-вом образования и науки РФ / В. Е. Гмурман. – 12-е изд. – Москва : Юрайт, 2013. – 478 с.

5. Вентцель Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения : учеб. пособие для вузов ; рек. М-вом образования и науки РФ / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 5-е изд., стер. – Москва : КноРус, 2010. – 480 с.

6. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. – Москва : Наука, 1983. – 176 с.

7. Емельянов Г. В. Задачник по теории вероятностей и математической статистике / Г. В. Емельянов, В. П. Скитович. – Ленинград : Изд-во ЛГУ, 1967. – 332 с.

8. Зубков А. М. Сборник задач по теории вероятностей : учеб. пособие для втузов / А. М. Зубков, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков. – Москва : Наука, 1989. – 224 с.

9. Кильберт М. Я. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики / М. Я. Кильберт, Ю. М. Сухов. – Москва : МЦНМО, 2018. – 456 с.

10. Мешалкин Л. Д. Сборник задач по теории вероятностей / Л. Д. Мешалкин. – Москва : Изд-во МГУ, 1971. – 148 с.

11. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями / Ф. Мостеллер. – Москва : Наука, 1985. – 88 с.

12. Прохоров А. В. Задачи по теории вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы : учеб. пособие / А. В. Прохоров, В. Г. Ушаков, Н. Г. Ушаков. – Москва : Наука, 1986. – 328 с.

13. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под ред. А. А. Свешникова. – Москва : Наука, 1970. – 656 с.

14. Смирнов Н. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений / Н. В. Смирнов, И. В. Дунин-Барковский. – Москва : Наука, 1969. – 512 с.

15. Семенов В. А. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для бакалавров и специалистов ; рек. УМО в обл. инновац. междисциплинар. общеобразоват. прогр. / В. А. Семенов. – Санкт-Петербург : Питер, 2013. – 192 с.

16. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин. – Москва : Наука, 1985. – 640 с.
17. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / [В. С. Мхитарян и др.] ; под ред. В. С. Мхитаряна. – Москва : Синергия, 2013. – 327 с.
18. Хамитов Г. П. Производящие функции в теории вероятностей / Г. П. Хамитов. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 1999. – 126 с.
19. Хамитов Г. П. Вероятности и статистики : учеб. пособие / Г. П. Хамитов, Т. И. Ведерникова. – Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2006. – 272 с.

Учебное издание

Ведерникова Татьяна Ивановна
Хамитов Гумар Павлович†

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ЗАДАЧНИК

Издается в авторской редакции

ИД № 06318 от 26.11.01.
Подписано в пользование 29.12.20.

Издательский дом Байкальского государственного университета.
664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11.
http://bgu.ru.